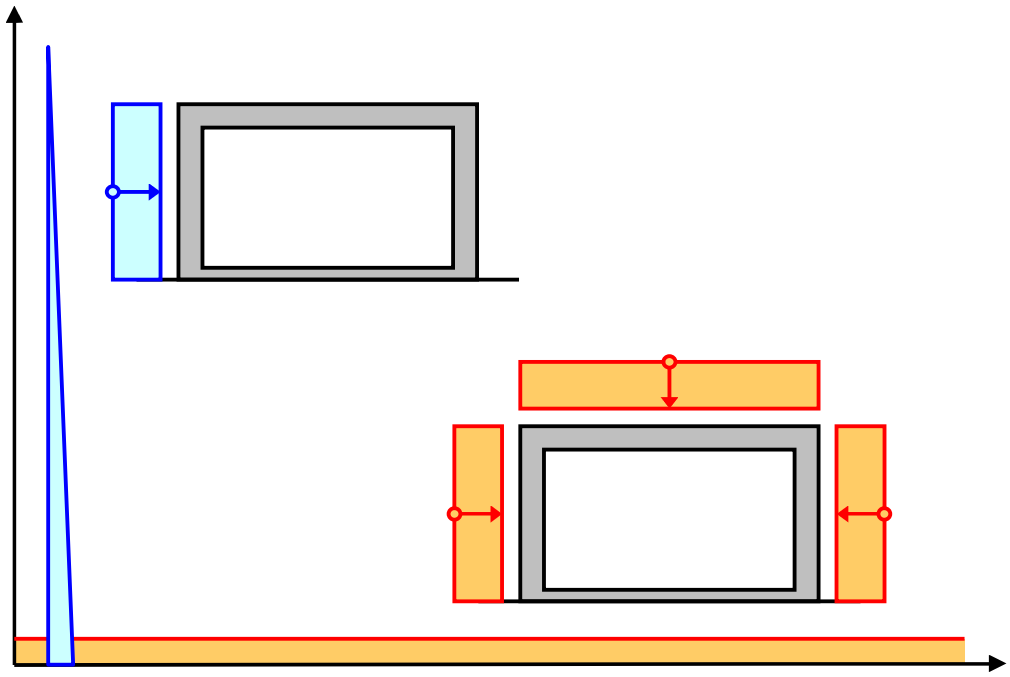
Myndigheten för samhällsskydd och beredskap

Bebyggelsens motståndsförmåga mot extrem dynamisk belastning

Del 3: Kapacitet hos byggnader



Bebyggelsens motståndsförmåga mot extrem dynamisk belastning
Del 3: Kapacitet hos byggnader

Författare: Morgan Johansson, Reinertsen Sverige AB och Leo Laine, LL Engineering

2012 MSB
Publikationsnummer: MSB142
ISBN: 978-91-7383-064-5

Innehållsförteckning

Förord

Projektsammanfattning

Project summary

Sammanfattning

Beteckningar

1 Inledning 1

1.1 Bakgrund 1

1.2 Syfte 2

1.3 Explosionsförloppet och dess effekter – orientering 3

1.4 Begränsningar 4

1.5 Kommentar om nyttjade referenser 4

1.5.1 Tidigare delar 4

1.5.2 Övriga referenser 4

2 Bebyggelsen 5

2.1 Begreppet bebyggelse 5

2.2 Orientering 5

2.3 Hotbildsbeskrivning 6

2.4 Laster i bebyggelsen 6

3 Byggnaders motståndsförmåga 9

3.1 Orientering 9

3.1.1 Dynamisk kontra statisk last 9

3.1.2 Respons vid en explosionslast 10

3.1.3 Hur ska man skydda sig? 12

3.2 Grundläggande dynamiska begrepp 13

3.2.1 Orientering 13

3.2.2 Kraft och tryck 14

3.2.3 Rörelsemängd, impuls och impulstäthet 14

3.2.4 Arbete och rörelseenergi 15

3.2.5 Dynamisk grundekvation 16

3.3 Kritiska parametrar – hur bör man bygga? 17
3.3.1 Orientering 17
3.3.2 Energiupptagningsförmåga 17
3.3.2.1 Orientering 17
3.3.2.2 Massans betydelse 19
3.3.2.3 Inverkan av styvhet, hållfasthet och deformationsförmåga 21
3.3.3 Hur säkerställa en seg respons 23
3.3.3.1 Orientering 23
3.3.3.2 Seghet i nyttjade material 23
3.3.3.3 Armeringsutformning 25
3.3.3.4 Kontinuitet hos byggnadsdelar 26
3.3.3.5 Redundans – flerfaldiga bärsystem 26
3.3.4 ”Smart” utformning av en byggnad 28
3.3.4.1 Undvik fördämningseffekter 28
3.3.4.2 Fördel med eftergivliga väggar 29
3.3.4.3 Risk med stora glaspartier 30
3.4 Åtgärder som ger ökad motståndsförmåga mot impulsbelastning 31
3.4.1 Förbruka energi på ett alternativt sätt 31
3.4.1.1 Koncept 31
3.4.1.2 LECA-kulor i mark 31
3.4.1.3 Sandwichelement – skikt av cellplast 32
3.4.1.4 Skyddande skikt – Stålrör + plåt som energiupptagning 32
3.4.2 Förstärkning 33
3.4.2.1 Koncept 33
3.4.2.2 Ökad massa 33
3.4.2.3 Ökad hållfasthet 33

4 Beräkningsmodell för dynamiskt belastad balk 36

4.1 Orientering 36
4.2 SDOF belastad med impulslast I_k 37
4.2.1 Yttre arbete 37
4.2.2 Inre arbete 37
4.2.2.1 Energibalans 37
4.2.2.2 Elastisk respons 38
4.2.2.3 Plastisk respons 39
4.2.2.4 Elastisk och plastisk respons 40
4.2.3 Ekvivalent statisk last 41
4.2.3.1 Definition 41
4.2.3.2 Elastisk respons 41
4.2.3.3 Plastisk respons 41
4.2.3.4 Elastoplastisk respons 42
4.3 SDOF belastad med trycklast F_k 42
4.3.1 Yttre arbete 42
4.3.2 Elastisk respons 42
4.3.3 Plastisk respons 43
4.3.4 Elastoplastisk respons 43

4.4 Skadekurvor 45
4.4.1 Orientering 45
4.4.2 Framtagning av skadekurvor 46
4.5 När blir en dynamisk last en impulslast? 49
4.5.1 Koncept 49
4.5.2 Elastisk respons 49
4.5.2.1 Förhållande utsvängningstid och varaktighet 49
4.5.2.2 Feluppskattning 51
4.5.2.3 Sammanställning 52
4.5.3 Plastisk respons 53
4.5.3.1 Förhållande maxlast och kapacitet 53
4.5.3.2 Feluppskattning 54
4.5.3.3 Sammanställning 54
4.5.4 Jämförelse med numeriskt enfrihetsgradsystem 55
4.6 Omvandling av balk till ett enfrihetsgradsystem (SDOF) 58
4.6.1 Koncept 58
4.6.2 Transformationsfaktorer κ 60
4.6.2.1 Utböjningsform, massfördelning och lastpåläggning 60
4.6.2.2 Bevarande av rörelseenergi – κ_m 61
4.6.2.3 Bevarande av yttre energi – κ_F 62
4.6.2.4 Bevarande av inre energi – κ_k 62
4.6.3 Sammanställning av κ för olika belastningsfall 64
4.7 Ekvivalent statisk last samt resulterande moment för en balk 66
4.7.1 Orientering 66
4.7.2 Elastisk respons 66
4.7.3 Plastisk respons 68
4.7.4 Kommentar 69
4.8 Brottkriterier 70
4.8.1 Orientering 70
4.8.2 Rotationskapacitet 70
4.8.2.1 Undersökta beräkningsmetoder 70
4.8.2.2 Betonghandboken 71
4.8.2.3 Bk 25 72
4.8.2.4 Eurokod 2 77
4.8.2.5 Räddningsverket raslaster 79
4.8.2.6 Amerikanska försvarets standard för explosion vid olyckor 79
4.8.3 Jämförelse av beräkningsmetoder 81
4.8.3.1 Orientering 81
4.8.4 Jämförelser med försöksdata 85
4.8.4.1 Orientering 85
4.8.4.2 Försök utförda på Chalmers 87
4.8.4.3 Försök utförda på KTH 88
4.8.5 Kommentar om predikterad rotationskapacitet 89

4.9 Resthållfasthet 90
4.9.1 Orientering 90
4.9.2 Elastisk respons 90
4.9.3 Plastisk och elastoplastisk respons 91
4.9.4 Ekvivalent impulslast 93
4.9.4.1 Elastisk respons 93
4.9.4.2 Plastisk respons 93
4.9.4.3 Elastoplastisk respons 94
4.9.5 Återstående bärförmåga 96

5 Slutsatser 97

5.1 Sammanställning och kommentarer 97

5.2 Behov av fortsatt arbete 98

6 Referenser 99

Bilaga A Härledning av transformationsfaktorer κ A.1

A.1 Orientering A.1

A.2 Elastisk respons A.2
A.2.1 Balk belastad med punktlast A.2
A.2.1.1 Fritt upplagd balk A.2
A.2.1.2 Dubbelsidigt fast inspänd balk A.3
A.2.1.3 Fast inspänd balk med rullstöd A.4
A.2.1.4 Konsolbalk A.5
A.2.2 Balk belastad med jämnt utbredd last A.6
A.2.2.1 Fritt upplagd balk A.6
A.2.2.2 Dubbelsidigt fast inspänd balk A.7
A.2.2.3 Fast inspänd balk med rullstöd A.8
A.2.2.4 Konsolbalk A.9

A.3 Plastisk respons A.10
A.3.1 Flytledsteori A.10
A.3.2 Transformationsfaktorer A.10

Bilaga B Centrala differensmetoden B.1

B.1 Numerisk lösningsmetod B.1

B.2 Anpassning till olinjär respons B.2

B.3 Stabilitet B.3

Bilaga C Skadekurvor C.1

C.1 Förutsättningar C.1

C.2 Elastisk respons C.2

C.3 Plastisk respons C.5

Bilaga D Beräkningsexempel D.1

D.1 Orientering D.1

D.2 Förutsättningar D.1

D.3 Lastbestämning D.2

D.3.1 Skalat avstånd Z D.2
D.3.2 Resulterande stötvågsparametrar D.2
D.3.3 Bestämning av last D.5

D.4 Egenskaper hos byggnad D.6

D.4.1 Orientering D.6
D.4.2 Geometri och material D.7
D.4.3 Massa D.7
D.4.4 Styvhet D.8

D.5 Förskjutning och snittkrafter D.10

D.5.1 Förutsättningar D.10
D.5.2 Byggnad utsatt för reflekterad stötvåg D.11
D.5.2.1 Förskjutning D.11
D.5.2.2 Ekvivalent statisk last och resulterande moment D.12
D.5.2.3 Sammanställning D.13
D.5.2.4 Kontroll av plastisk deformationsförmåga D.15
D.5.2.5 Förfinad kontroll av erforderlig plastisk deformationsförmåga D.17
D.5.3 Byggnad utsatt för oreflekterad stötvåg D.18

D.6 Kommentar D.19

Bilaga E Stötvågsparametrar positiv fas E.1

Förord, rapport 2009

Denna rapport är den tredje och avslutande delen i det av Räddningsverket finansierade forskningsprojektet Bebyggelsens motståndsförmåga mot extrem dynamisk belastning som pågick under perioden januari 2006 till december 2008. Rapporten utgör en sammanställning av hur enskilda konstruktionsdelar klarar av belastningen från en explosion. Arbetet som presenteras här har främst utförts under perioden januari 2008 till december 2008 men valda delar har även bearbetats under 2009 med finansiellt stöd från Myndigheten för samhällsskydd och beredskap (MSB).

Arbetet har följts och stöttats av Björn Ekengren, Räddningsverket, och ett stort tack riktas till Björn för dennes inspirerande insatser, utan vilka detta projekt inte hade varit detsamma. Referensgrupp har utgjorts av den såkallade Verkansgruppen – en sammanslutning av representanter från myndigheter, institutioner samt konsulter med kunnande inom explosionsbelastning.

Denna rapportversion är en omarbetad version av en preliminär förhandskopia utgiven i juni 2009.

Göteborg, december 2009

Morgan Johansson och Leo Laine

Förord, revidering 2012

Denna publikation är en nyutgåva av rapporten Bebyggelsens motståndsförmåga mot extrem dynamisk belastning. Delrapport 3 – Kapacitet hos byggnader, utgiven av MSB 2009. I samband med en allmän uppdatering av publikationer som Räddningsverket gett ut har en översiktlig revidering gjorts under hösten 2012.

Detta är den första revideringen och utförda revideringar utgörs av att diverse felaktigheter rättats till. I stort är dock sakinnehållet detsamma som i underliggande rapport och fokus har legat på att rätta till samt snygga upp valda delar av innehållet.

Göteborg, oktober 2012

Morgan Johansson och Leo Laine

Projektsammanfattning

I samhället finns en starkt varierad bebyggelse med olika byggnader som i varierande omfattning löper risk att utsättas för extrem dynamisk belastning. Denna last kan orsakas av naturliga fenomen eller härröra från olika typer av olyckor. En extremare variant kan även uppstå i aktioner vilka syftar till avsiktlig skada, såsom väpnat angrepp i samband med grov kriminalitet och/eller terrorism.

En viktig uppgift för Räddningsverket, numera Myndigheten för samhällskydd och beredskap (MSB), är att förebygga olyckor i den normala vardagen samt begränsa dess effekter när sådana ändå inträffar. I egenskap av expertmyndighet åligger det Räddningsverket att fortlöpande vårda och bygga ut den kunskapsbas som finns inom detta område och detta projekt – Bebyggelsens motståndsförmåga mot extrem dynamisk belastning – är ett led i detta arbete. Projektets huvudsakliga syfte är att öka kunskapen om bebyggelsens förmåga att absorbera och motstå de avsevärda påfrestningar den utsätts för vid extrema dynamiska belastningar. En förutsättning för detta är en djupare förståelse om både lastens uppförande och den drabbade konstruktionens strukturella respons när den utsätts för dylika extremlaster.

Projektets huvudmål kan delas in i två delar – laster i samhället samt bebyggelsens motstånds-förmåga – och arbetet har delats in i tre delar med inriktning enligt nedan:

- Del 1: Last av luftstötvåg
- Del 2: Explosion i gatukorsning
- Del 3: Kapacitet hos byggnader

I Del 1 identifieras de laster som kan tänkas uppstå i bebyggelsen samt ges en metodik för att bestämma aktuella laster utgående från en definierad hotbild. En genomgång görs av luftstötvågens utbredning i omgivningen med hänsyn till tid och avstånd samt inverkan av fenomen såsom reflexion, fördämning, och diffraktion. Publikationen innehåller också en övergripande genomgång av byggnaders samt människors tålighet mot explosionslast.

Del 2 utgör en fördjupning av Del 1 och behandlar mer ingående hur effekten av en explosionslast påverkas av omgivningen i en antagen stadsmiljö. Rapporten redovisar resultat från, samt jämförande finita volymanalyser med, en försöksserie utförd i anslutning till projektet.

Slutligen behandlar Del 3 bebyggelsens möjlighet att motstå de laster som uppstår vid en explosion och samband mellan impulslast och statisk last förklaras. En beräkningsmetodik för att bedöma en betongkonstruktions bärförmåga presenteras och ett illustrerande exempel – innehållande lastframtagning, resulterande dynamisk respons samt kapacitetskontroll av utsatt konstruktionsdel – ges.

Project summary

Today's society contains a highly varied housing settlement with structures that may be subjected to extreme dynamic loads. Such loads can be due to natural causes or to different sort of accidents. A more extreme variant may be caused by actions that intend to cause harm, such as armed attacks related to crime and/or terrorism.

An important task for the Swedish Rescue Services Agency, now MSB - Swedish Civil Contingencies Agency, is to prevent accidents in the normal everyday life, and to limit the effect when such things still happen. As a government authority, it is the responsibility of the Swedish Rescue Services Agency to continuously maintain and develop the existing knowledge within this field; and this project – Housing settlement capacity against extreme dynamic loading – is a part of this work. The main aim of the project is to increase the knowledge of the settlement's capacity to absorb and withstand the considerable strain it is exposed to when subjected to extreme dynamic loads. A prerequisite for this is a deeper understanding of both the load behaviour and of the affected structural behaviour of the buildings under such load conditions.

The aim of the project may be divided into two parts – loads in the community, and the housing settlement capacity – and the work have been divided into three parts with the following content:

- Part 1: Load of shock wave in air
- Part 2: Explosion at an urban intersection
- Part 3: Building capacity

In Part 1, the loads that are deemed possible to appear within the housing settlement are identified and a methodology to determine load magnitudes based on a defined threat level is given. A survey is given of the spreading of the shock wave into the surrounding regarding time, distance and due to the influence of phenomena such as reflexion, confinement and diffraction. The report also includes a brief review of how well buildings and humans withstand the effect of a blast load.

Part 2 constitute a continuation of the first report and treats more thoroughly how the blast load from an explosion is affected by its surrounding in a presumed urban environment. The report also includes the results from, and comparisons with belonging finite volume analyses of, a test series, carried out in conjunction with the project.

Finally, Part 3 deals with the possibility of the housing settlement to withstand the loads that appears at an explosion, and the relation between impulse and static loading is explained. A method to calculate the capacity of a concrete structure is presented and an illustrating example of how to determine the load, the resulting dynamic behaviour and capacity control of the exposed structure, is presented.

Sammanfattning

Räddningsverket, numera Myndigheten för samhällskydd och beredskap (MSB), har ett viktigt ansvar för det olycksförebyggande- samt skadebegränsande arbetet i samhället. Det är för Räddningsverket därför också nödvändigt att besitta kompetens och kunnande att hantera extrema dynamiska laster samt dess inverkan på bebyggelsen. Därför arbetar Räddningsverket fortlöpande med att vårda och bygga ut den befintliga kunskapsbas inom detta område och denna rapport är ett led i detta arbete.

Denna rapport utgör den tredje och avslutande delen i projektet Bebyggelsens motståndsförmåga mot extrem dynamisk belastning. Projektets syfte är att öka kunskapen om extrema dynamiska belastningar samt om bebyggelsens förmåga att motstå de påfrestningar dessa kan ge upphov till.

I denna rapport behandlas bebyggelsens motståndsförmåga, där huvudfokus ägnas åt att beskriva en beräkningsmodell för en dynamiskt belastad balk. En övergripande genomgång ges av vad som skiljer sig i responsen hos en konstruktion som utsätts för en statisk eller dynamisk last. Kritiska parametrar berörs och det redogörs för vilka egenskaper som är viktiga hos en konstruktion för att klara de påfrestningar som uppkommer vid denna typ av belastning. Vidare ges råd för hur en konstruktion ska utformas för att uppvisa god motståndsförmåga samt exempel på åtgärder som kan göras för att förstärka en befintlig konstruktion. Samband mellan impulslast, uträttat arbete och ekvivalent statisk last behandlas tillsammans med en genomgång av brottkriterier. Detta illustreras i ett utförligt beräkningsexempel där olika delar – lastdefinition, dynamisk respons samt efterföljande kapacitetskontroll hos utsatt konstruktionsdel – behandlas.

Beteckningar

Romerska versaler

A	area, parameter för rotationskapacitet
A_s	armeringsmängd dragarmering
A_s'	armeringsmängd tryckarmering
B	parameter för rotationskapacitet
C	parameter för rotationskapacitet
E	elasticitetsmodul
E_c	elasticitetsmodul betong
E_s	elasticitetsmodul armering
E_k	kinetisk energi
F	kraft, last
F_1	maxlast
F_b	last balk
F_c	kraftresultant tryckt zon
F_k	karakteristisk trycklast
F_{max}	maximal statisk last
F_s	kraftresultant dragen zon
G	skjuvmodul
I	impuls, tröghetsmoment
I_1	impuls vid last $F_1(t)$
I_k	karakteristisk impuls
I_{tot}	ekvivalent impulslast
M	moment
M_f	fältmoment
M_{rd}	momentkapacitet
M_s	stödmoment
M_{sd}	dimensionerande moment
N	normalkraft
P	tryck
P_0	tryck hos ostörd luft
P_r^+	reflekterat övertryck positiv fas
P_s^+	oreflekterat övertryck positiv fas
Q	ekvivalent statisk last

R	inre kraft, kapacitet
R_b	kapacitet balk
S_i	stötvågsparameter i punkt i
T	periodtid
V	tvärkraft
V_s	tvärkraft vid stöd
W	arbete, laddningsvikt i kg TNT
W_i	inre arbete
W_{mod}	laddningsvikt beaktat spegling
W_y	inre arbete
Z	skalat avstånd

Romerska gemener

a	acceleration, längd på flytledens utbredning
b	bredd
c	dämpning, avstånd till armeringens tyngdpunkt
c_b	dämpning balk
d	inre hävarm
f_{cc}	tryckhållfasthet betong
f_{sc}	flytspänning tryckarmering
f_{st}	flytspänning dragarmering
f_{sv}	flytspänning byglar
f_{su}	brottspänning stål
f_{sy}	flytspänning stål
f_{yk}	karakteristisk flytspänning
h	höjd
i	impulstäthet
i^+, i_s^+	oreflekterad impulstäthet positiv fas
i_r^+	reflekterad impulstäthet positiv fas
k	styvhet
k_b	styvhet balk
k_λ	faktor för rotationskapacitet
l	längd, sträcka
l_0	längd mellan flytled och momentnollpunkt

l_1	skjuvspännvidd
m	massa
m'	massa per längdenhet
m_b	massa balk
n	totalt antal
p	rörelsemängd
q	utbredd last, ekvivalent statisk last
r	detonationsavstånd, krökningsradie
r_A, r_B	modifierat detonationsavstånd med hänsyn till mellanliggande hinder
t	tid
t^+	varaktighet positiv fas
t_1	varaktighet för lasten $F_1(t)$
t_a	ankomsttid
t_Δ^+	varaktighet triangellast
u	förskjutning
u_{el}	elastisk förskjutning
u_{pl}	plastisk förskjutning
u_s	förskjutning systempunkt
u_u	förskjutning vid en last $0{,}95 \cdot Fmax$
u'	hastighet
u''	acceleration
u''	krökning
v	hastighet
v_s	hastighet systempunkt
x	längdkoordinat, tryckzonshöjd

Grekiska tecken

α	vinkel, avklingningsfaktor, konstant, kvot av mängden stöd- och fältarmering, speglingsfaktor, kvot mellan armeringens och betongens elasticitetsmodul
β	konstant för skjuvspänning
γ	seghetskvot
γ_F	trycklastfaktor
γ_I	impulslastfaktor
κ_c	transformationsfaktor för dämpning
κ_F	transformationsfaktor för last
κ_k	transformationsfaktor för styvhet
κ_m	transformationsfaktor för massa
κ_{mF}	transformationsfaktor för massa och last
Δ	inkrementell
δ_{el}	fel vid elastisk respons
δ_{pl}	fel vid plastisk respons
ε_{cu}	brottöjning betong
ε_p	töjning av förspänning
ε_{sh}	armeringstöjning vid hårdnande
$\varepsilon_{s,fsu}$	armeringstöjning vid maximal spänning fsu
ε_{su}	brottöjning armering
ε_{sy}	flyttöjning armering
φ	vinkel
θ	rotation, rotationskapacitet
η	styvhetskvot
λ	skjuvslankhet
ρ	densitet
ω	vinkelfrekvens
$\omega_{s,bal}$	balanserad mekanisk armeringskvot
ω_s	mekanisk armeringskvot för dragarmering
ω_s'	mekanisk armeringskvot för tryckarmering
$\omega_{s,krit}$	kritisk mekanisk armeringskvot
ω_v	mekanisk armeringskvot för byglar

Index

+	indikerar positiv fas
-	indikerar negativ fas
0	initialt läge
1, 2, 3	numrering
I, II, III	indikerar stadium I (osprucket), II (sprucket) och III (plastiskt)
b	balk
D	dynamisk
dz	deformationszon
el	elastisk
f	indikerar fält
i	inre, nummer
k	karakteristisk
pl	plastisk
r	indikerar reflekterad stötvåg
s	indikerar oreflekterad stötvåg, indikerar stöd, systempunkt
sb	skyddsbur
sta	statisk
tot	total
x	indikerar riktning x
y	yttre

1 Inledning

1.1 Bakgrund

Att vi i vår normala vardag ska kunna utsättas för en explosionslast är något som för de flesta är högst osannolikt. För gemene man kan detta tyckas utgöra en sådan exceptionell händelse att något särskilt beaktande av den och dess eventuella konsekvenser inte är nödvändigt. Erfarenhetsmässigt kan det dock tyvärr konstateras att det i vårt samhälle med jämna mellanrum inträffar dylika händelser som ger upphov till, eller medför risk för, en explosionslast i bebyggelsen. Detta kan exempelvis vara orsakat av en olycka i form av en vält lastbil som transporterar gas eller brandfarlig vätska, en olycka i en processanläggning eller i form av en utplacerad sprängladdning på allmän plats med avsikt att orsaka avsiktlig skada.

Olyckor eller avsiktliga aktiviteter som ger upphov till explosioner kan alltid inträffa och bör därför alltid beaktas vid framtagning av möjliga lastfall. Sannolikheten att sådana sker i bebyggelsen varierar dock med enskilda byggnaders användningsområden. För exempelvis officiella byggnader som har koppling till finansiella, politiska eller säkerhetsmässiga tillämpningar finns rimligen en ökad risk att utsättas för avsiktlig explosionslast. På motsvarande sätt medför det att byggnader där explosiva ämnen normalt hanteras är mer utsatta för explosionslast ursprungen från en olycka. I Figur 1.1 visas förödelsen efter att en brand i en sprängfirma i Åmål 2007 orsakat en kraftig explosion som ledde till betydande skador på närområdet. Även om denna typ av händelser är ovanliga så inträffar de och belyser vikten hos en byggnad att uppvisa en tillräcklig bärförmåga även mot exceptionella laster.

Figur 1.1 Skador efter explosion orsakad av brand i sprängfirma i Åmål 2007. Foton från NWT (2007).

1.2 Syfte

Räddningsverket[1] har ett viktigt ansvar för det olycksförebyggande- samt skadebegränsande arbetet i samhället. Det är för Räddningsverket därför också nödvändigt att besitta den kompetens och kunnande, rörande bebyggelsens förmåga att hantera extrema dynamiska laster, som kan förväntas av en sådan expertmyndighet. Med anledning av detta arbetar Räddningsverket fortlöpande med att vårda och bygga ut den befintliga kunskapsbas som existerar inom detta område.

Det av Räddningsverket finansierade forskningsprojektet Bebyggelsens motståndsförmåga mot extrem dynamisk belastning är ett led i detta arbete och denna rapport utgör den tredje och avslutande delen i projektet. Projektets huvudsakliga syfte är att öka kunskapen om extrema dynamiska belastningar samt om bebyggelsens förmåga att absorbera och motstå de avsevärda påfrestningar dessa kan ge upphov till.

Projektets huvudmål kan delas in i två delar:

- Laster i samhället
- Bebyggelsens motståndsförmåga

I den första punkten ingår att identifiera de laster som kan tänkas uppstå i bebyggelsen samt beskriva en metodik för att bestämma aktuella laster från en definierad hotbild. Detta innebär en studie av luftstötvågens utbredning i stadsmiljö där luftstötvågens egenskaper med hänsyn till tid och avstånd samt fenomen såsom reflexion, fördämning, och diffraktion får en avgörande betydelse för vilken last som är att förvänta i ett givet läge på ett givet avstånd från en given explosionskälla. Dessa delar har också behandlats i del 1 och 2, Johansson och Laine (2012a, 2012b).

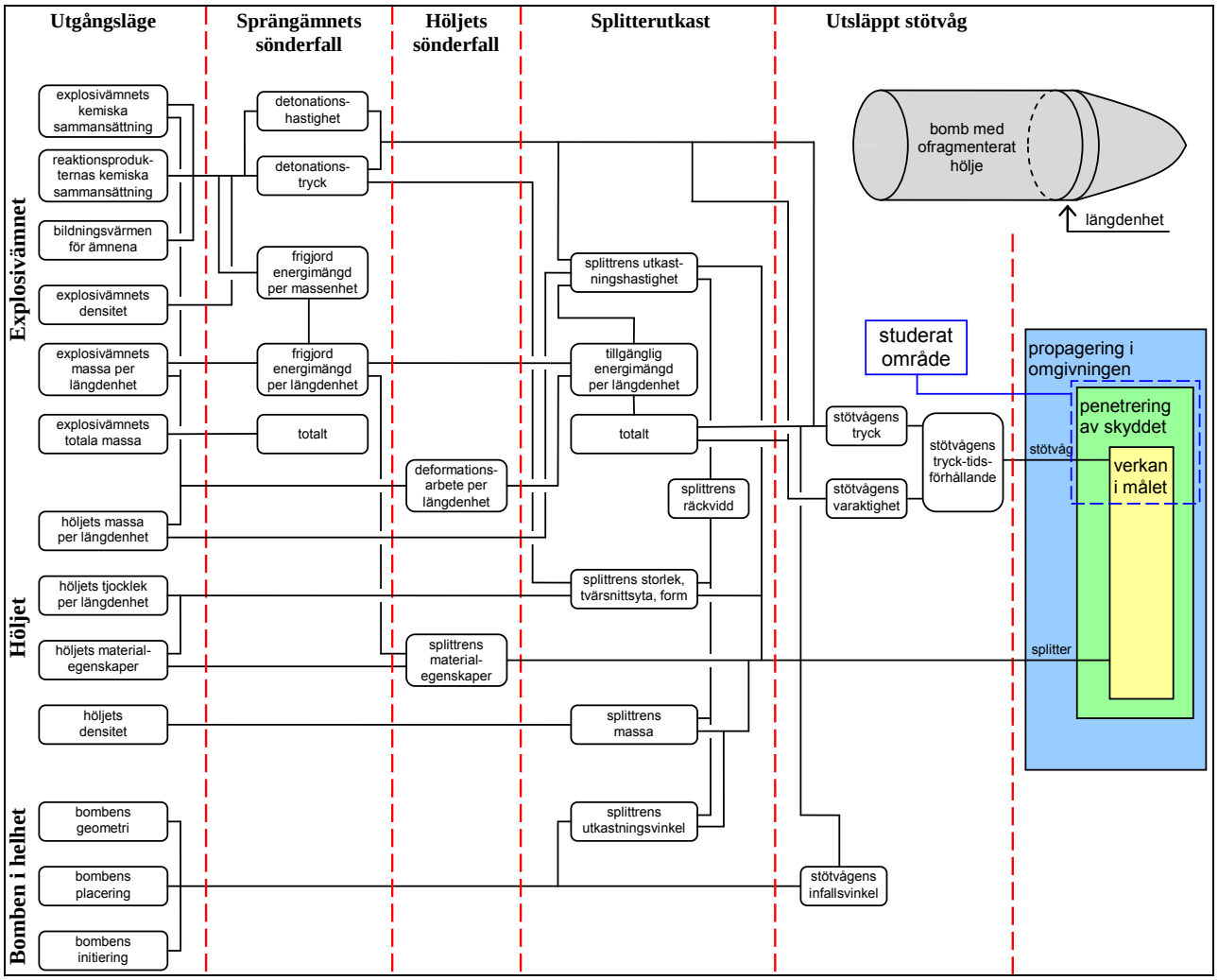
I den andra punkten behandlas bebyggelsens möjlighet att motstå de laster som uppstår vid en explosion. Detta har i viss mån övergripande behandlats i Johansson och Laine (2012a) men berörs mer ingående i denna del. Det övergripande syftet med denna rapport är att beskriva hur bebyggelsens kapacitet att motstå påfrestningar från en explosionslast kan bedömas. En nödvändig del i detta är en metod för att bedöma enskilda byggnadsdelars, och i förlängningen hela byggnader, förmåga att motstå de påkänningar de utsätts för i samband med en explosionsbelastning. Det huvudsakliga syftet med denna rapport har varit att beskriva hur detta går till och behandlar bland annat:

- skillnad mellan statisk och dynamisk last samt skillnad i respons hos byggnad när den utsätts för dessa,
- identifiering av kritiska parametrar av betydelse för bebyggelsens motståndskraft, hur denna bör utformas för bästa resultat gentemot explosionslast samt möjliga åtgärder för att öka kapaciteten hos befintlig bebyggelse,
- beräkningsmodell för impulsbelastad balk när denna uppvisar en elastisk, plastisk eller elastoplastisk respons,
- genomgång av aktuella brottkriterier samt hur storleken på dessa bestäms,
- återstående bärförmåga, resthållfasthet, hos konstruktion som skadats av tidigare explosion.

[1] Räddningsverket upphörde den 31 december 2008 och dess funktion innehas sedan 1 januari 2009 av Myndigheten för samhällsskydd och beredskap (MSB). I denna rapport hänvisas dock fortfarande till Räddningsverket.

1.3 Explosionsförloppet och dess effekter – orientering

I detta arbete behandlas bebyggelsens motståndsförmåga, dvs. enskilda byggnaders och konstruktionsdelars förmåga att motstå de påfrestningar de utsätts för i händelse av en explosion. En explosion och de effekter den ger upphov till är ett komplext fenomen som kräver beaktande av många olika delar för att ge en fullständig bild av vad som sker. I Figur 1.2 illustreras schematiskt vad som inträffar vid en explosion – från antändning och detonation av sprängämnet till dess att en utsatt byggnad utsetts för en kombination av stötvåg och splitter från explosionen. Som framgår av figuren finns det ett stort antal olika delar att behärska för att fullständigt förstå hela explosionsförloppet och dess effekter. De delar som är av särskilt intresse i denna del är också markerade. Lastens storlek har tidigare behandlats i exempelvis Johansson och Laine (2012a, 2012b).



Figur 1.2 Schematisk illustration av vad som händer vid detonation av en bomb. I denna rapport studerat område har markerats i figuren.

1.4 Begränsningar

De laster som orsakas av en explosion kan bestå av flera olika typer och kan grovt delas upp som:

- stötvåg i luft eller mark,
- splitterbelastning,
- sekundära effekter såsom fallande rasmassor från kollapsade byggnader.

I denna rapport presenteras en metod för att bedöma kapaciteten hos en konstruktionsdel utsatt för en impulslast, vilken utgås vara resultaten från en stötvåg orsakad av en explosion. Detta innebär att last från luft- eller markstötvåg enligt ovan täcks in. De beräkningsmetoder som beskrivs kan i princip användas även för liknande belastningsfall – såsom påkörning av fordon, fallande massor eller splitteranslag – men för dessa fall finns specifika skillnader som medför att andra särskilda beaktanden också behöver göras. Vid splitterbelastning inträffar även andra typer av skador som kan ha betydande inverkan på konstruktionens bärförmåga. Denna lasttyp hör dock samman framförallt med militära vapen och behandlas därför inte vidare här. För närmare information om denna typ av laster, hänvisas därför till Leppänen (2005) och Nyström (2008). Vid impulsbelastning från påkörande fordon eller fallande massor har massans storlek, utbredning samt varaktighet betydande inverkan på den utsatta konstruktionens respons, något som inte ryms inom detta arbete. Läsaren hänvisas därför istället till Johansson (1999) för en översiktlig genomgång av detta.

Den metod som beskrivs i denna rapport för att bedöma en konstruktionsdels bärförmåga är främst framtagen för armerade betongkonstruktioner. Metoden kan dock med fördel användas även för andra material men bör då anpassas till de begränsningar och möjligheter som råder för dessa. Framtagna uttryck begränsas till uppförandet hos balkar och enkelspända plattor. Konceptet är detsamma för plattor men nyttjade transformationsfaktorer skiljer sig från de som presenteras i denna rapport. För kompletterande information om explosionsbelastning på plattor, se Granström (1958), Biggs (1964) och Balazs (1997).

1.5 Kommentar om nyttjade referenser

1.5.1 Tidigare delar

En del av det material som tas upp i denna rapport har tidigare behandlats i del 1 och 2, Johansson och Laine (2012a, 2012b). Med syfte att tydligare knyta samman de olika publikationerna samt underlätta för läsaren ges dock kortare återblickar till valda delar av detta material, vilket innebär att viss upprepning fås.

1.5.2 Övriga referenser

Den beräkningsmetodik för impulsbelastad balk som presenteras i avsnitt 4.2 och avsnitt 4.6 har sin grund i Granström (1958). Utgående från denna har materialet uppdaterats i Balazs (1997) samt vidareutvecklats av Nyström (2006). En del material från den senare samt en ännu icke utgiven rapport av Johansson och Wendt har också inarbetats i här aktuell publikation. Slutligen har den övergripande genomgång av grundläggande dynamiska begrepp som görs i avsnitt 3.2 utgått från och inspirerats av material presenterat i Ekengren *et al.* (2005).

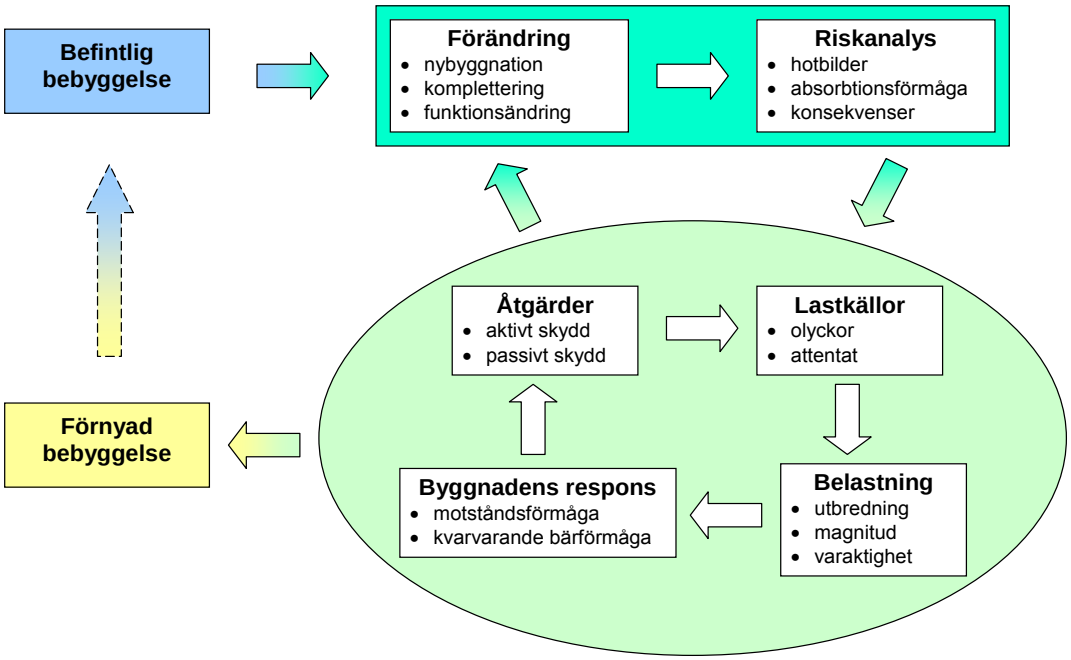
2 Bebyggelsen

2.1 Begreppet bebyggelse

Med bebyggelsen syftas här framförallt på de byggnader som tillsammans utgör densamma men även på de människor som vistas i den. Det skiljs således på termen bebyggelse och byggnad. Förenklat uttryckt kan sägas att bebyggelsen består av byggnader med mellanrum där människor kan vistas.

2.2 Orientering

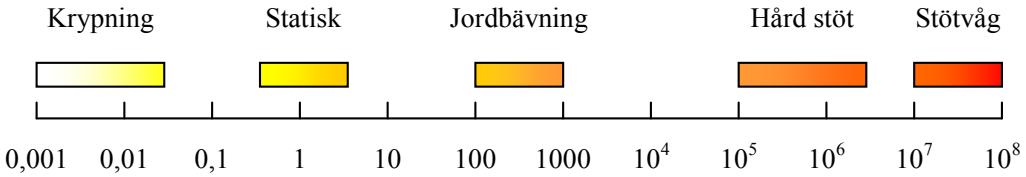
Samhällets befintliga bebyggelse är en tillgång som genomgår en ständig förändring i form av nybyggnation, tillbyggnad och/eller kompletterande funktionsändringar såsom schematiskt illustreras i Figur 2.1. I dagens byggande sker även en kontinuerlig utveckling av material, byggteknik och konstruktionslösningar vilket medför att förutsättningarna för bebyggelsen kan förändras i sådan grad att de dimensioneringsmetoder som en gång utvecklats för att beakta exempelvis dynamiska påfrestningar inte längre är gällande för dagens byggande. Det är viktigt att försöka ha åtgärder och lastkällor i proportion till sannolikheten till att något sker. Förändringar i bebyggelsen kan således leda till behov av en ny riskanalys, ett ämne som dock ligger utanför detta arbete.



Figur 2.1 Process för bebyggelsens kontinuerliga förändring.

2.3 Hotbildsbeskrivning

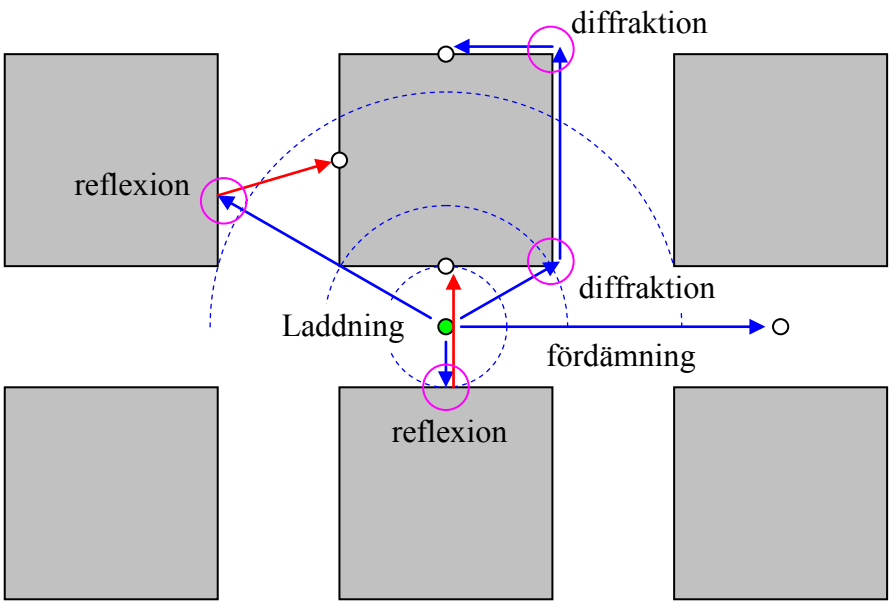
I Johansson och Laine (2012a) ges en övergripande beskrivning av möjliga dynamiska laster i samhället varför detta inte berörs mer ingående här. Det tål dock att upprepas att det kan vara stor skillnad på graden av dynamisk belastning mellan olika laster. I Figur 2.2 illustreras detta i förhållande till en statisk last som har tilldelats värdet 1. Krypning kan enligt denna sägas vara en faktor 100-1 000 gånger långsammare medan en jordbävning är en faktor 100-1 000 gånger snabbare. En explosionslast utmärks normalt med en extremt hög belastningsnivå som verkar under en mycket kort tidsperiod och kan, beroende på aktuell styrka hos explosionen, karakteriseras ligga inom ett ungefärligt intervall om en faktor 100 000 till 100 miljoner gånger snabbare än en statisk last. Detta resulterar i en strukturell respons, hos utsatt byggnad, som skiljer sig mot vad som fås vid belastning av en motsvarande statisk last. Denna skillnad innebär också att tillvägagångssättet vid dimensionering av en utsatt byggnad blir annorlunda.



Figur 2.2 Principiell skillnad i belastningshastighet hos byggnad utsatt för olika lasttyper. Angivna värden anger storleksordningen i förhållande till en statisk last. Baserad på Bischoff och Perry (1991).

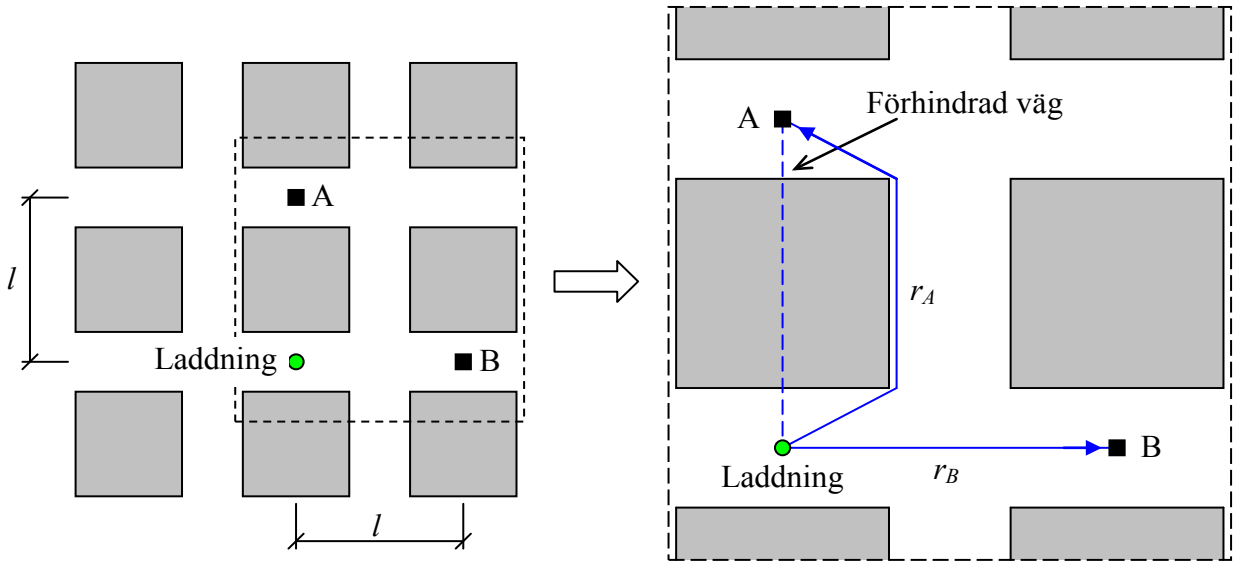
2.4 Laster i bebyggelsen

I del 1 och 2, Johansson och Laine (2012a, 2012b), redogörs för betydelsen av bebyggelsens geometriska utformning samt explosionsladdningens placering i denna. I en komplex geometrisk omgivning, vilket är fallet i stadsmiljö, kommer fenomen såsom diffraktion, reflexion, fördämning samt överlagring få betydande inverkan på den resulterande lastbilden, se Figur 2.3. Reflexion uppstår när stötvågen träffar en byggnad vilket leder till en flerfaldig tryckökning som beror på stötvågens ingående tryck samt anslagsvinkel. Diffraktion är en försvagning av stötvågen som inträffar när den rör sig runt ett hörn hos en byggnad. Slutligen uppstår fördämning av stötvågor när spridningen av denna förhindras av omgivningen, vilket leder till att den energiuttunning som skulle fåtts vid en oförhindrad sfärisk utbredning senareläggs.



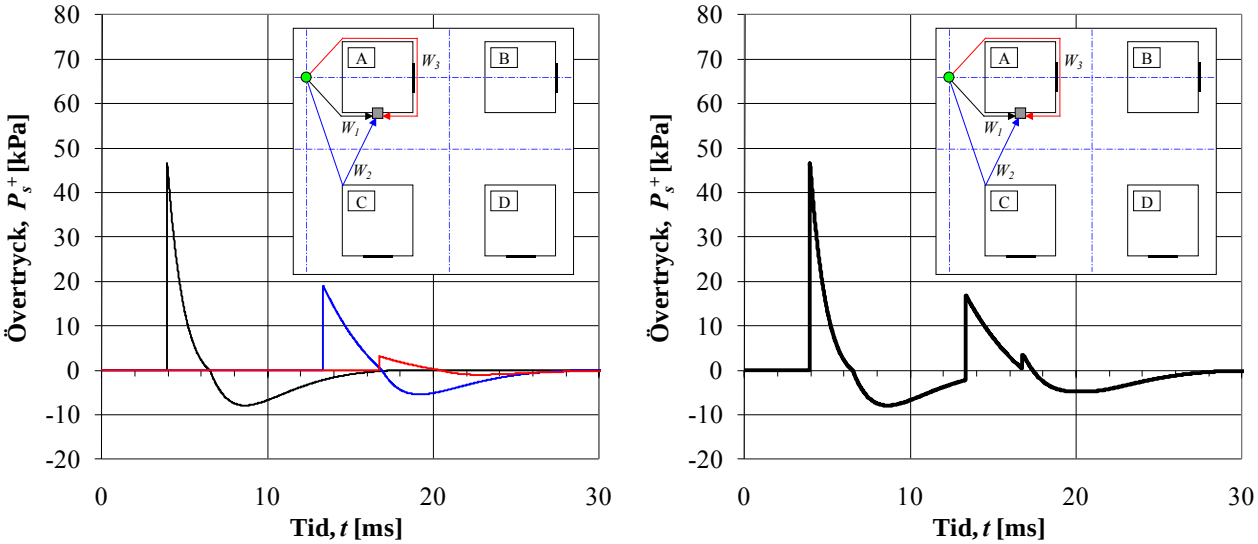
Figur 2.3 Schematisk illustration av stötvågsfenomen som uppstår vid explosion i bebyggelse.

Den resulterande lasteffekten i en given punkt kommer att variera beroende på hur stötvågens utbredningsmöjligheter ser ut. I Figur 2.4 illustreras detta för två punkter, punkt A och punkt B. Båda punkterna befinner sig lika långt från laddningen, en sträcka l, men punkt A är placerad i lä bakom en byggnad medan punkt B befinner sig på samma gata. Stötvågens väg fram till punkt A hindras av den mellanliggande byggnaden, vilket gör att den tvingas gå runt två hörn samt förlängs till sträckan r_A. För punkt B får intilliggande byggnader en motsatt effekt. Den sträcka r_B som stötvågen färdas är visserligen densamma som det faktiska avståndet l mellan laddning och studerad punkt men eftersom byggnaderna här förhindrar stötvågens utbredning åt sidorna ökar explosionens energiintensitet i gatan, vilket medför ökad lasteffekt i punkt B jämfört med vad som skulle varit fallet om de omgivande byggnaderna inte varit där.



Figur 2.4 Schematiskt exempel av hur stadsmiljön kan påverka stötvågens utbredning.

En mer detaljerad kontroll visar att det tryck som uppstår i en given punkt är resultatet av ett samspel mellan flera reflekterande stötvågor såsom schematiskt illustreras i Figur 2.5. Det kan sålunda konstateras att det vid en explosion i bebyggelsen kommer uppstå en komplex kombination av reflexion, fördämning samt diffraktion. För att kunna bedöma vilken reell effekt som denna lastpåverkan har på en given byggnad eller byggnadsdel krävs dock en närmare kontroll av den aktuella lastupptagningsförmågan hos denna. Hur denna kan bestämmas behandlas också mer ingående i kapitel 4.



Figur 2.5 Schematisk bild av summering av flera samverkande stötvågor vid bestämning av resulterande lasteffekt i punkt bakom byggnad. Baserad på en förenklad beräknings-metod, se Johansson och Laine (2012b).

3 Byggnaders motståndsförmåga

3.1 Orientering

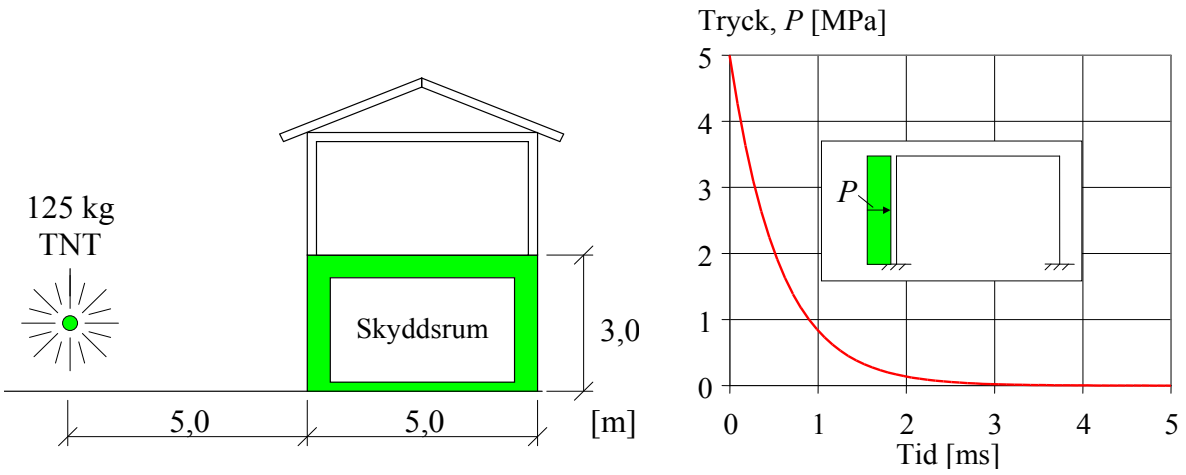
3.1.1 Dynamisk kontra statisk last

Den strukturella responsen hos en statiskt och dynamiskt belastad konstruktion kan skilja sig åt dramatiskt, särskilt om den dynamiska lasten utgörs av en intensiv men kortvarig impulslast. I många fall beaktas dock inte dynamiken explicit vid dimensioneringen av en konstruktion. Istället används ofta förenklade statiska belastningsfall, vilka grundar sig på beräkningsmodeller som på olika sätt beaktar det dynamiska skeendet. En sådan metodik är att bestämma storleken hos den statiska last, med motsvarande utbredning, som genererar motsvarande yttre arbete som aktuell dynamisk last – såkallad ekvivalent statisk last, även benämnd statisk ekvivalentlast. För det stora flertalet tillämpningar fungerar denna metodik också bra och används exempelvis i Räddningsverkets skyddsrumsregler Skyddsrum SR 06, Räddningsverket (2006), där aktuella dynamiska lastfall från explosion och raslast omräknats till ekvivalenta statiska lastfall som används vid dimensioneringen av ett skyddsrum.

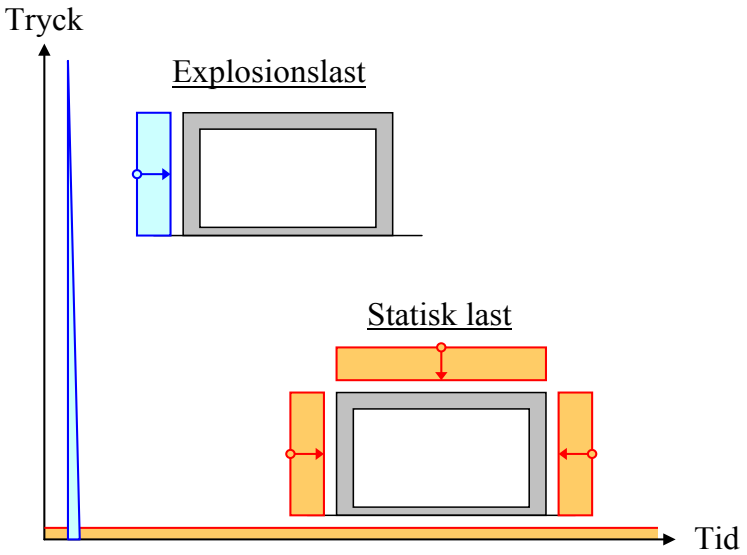
Det är viktigt att inse att den statiska ekvivalentlast som tagits fram för en given kombination av dynamisk last och belastad konstruktionsdel bygger på vissa bestämda förutsättningar. Om dessa förutsättningar inte uppfylls gäller inte heller framtagen ekvivalentlast, något som kan leda till problem för tolkning av en aktuell lastsituation. I dagens regelverk saknas det ofta klara anvisningar på hur exceptionella dynamiska laster ska beaktas mer detaljerat. Vidare är förutsättningar och antaganden som använts vid framtagning av idag accepterade statiska dimensioneringsmetoder i regel bristfällig och oklar. Detta innebär att det kan vara svårt att göra en pålitlig bedömning av vilka konsekvenser en förändring av bebyggelsen får. I en sådan situation blir det därför viktigt att förmågan finns att närmare undersöka den aktuella problemställningen, något som förutsätter en djupare kunskap om den drabbade konstruktionens strukturella respons när den utsätts för dynamiska laster.

Bakgrund och metod för omvandling av dynamisk last till en statisk ekvivalentlast behandlas mer ingående i kapitel 4 men för att översiktligt påvisa skillnaderna mellan en dynamisk last och den statiska ekvivalentlasten jämförs här situationen för ett skyddsrum utsatt för en explosion enligt de kriterier som ställs i Skyddsrum SR 06. Enligt denna ska ett skyddsrum klara verkan av en tryckvåg motsvarande den som åstadkoms av en explosion från 125 kg TNT som briserar i det fria med ett avstånd på 5 m vid möjlighet till fri tryckavlastning. Lastdata för en sådan lastsituation illustreras i Figur 3.1 och av detta framgår att det maximala trycket uppgår till omkring 5 MPa men att lastens varaktigheten också är mycket kort – redan efter omkring 3 ms har trycket sjunkit till nästan noll.

Detta kan jämföras med det statiska lastfall som används vid dimensionering av ett skyddsrum utsatt för explosionslast där lasten antas angripa från alla håll samtidigt med ett konstant tryck på 50 kPa, se Figur 3.2. Dvs. det maximala trycket hos aktuell impulslast är omkring 100 gånger större än trycket för den ekvivalenta statiska lasten. Resultatet av denna korta men intensiva belastning är ett strukturellt beteende som också märkbart skiljer sig från vad som är fallet av en statisk last, se avsnitt 3.1.2.



Figur 3.1 *Reflekterat tryck-tidssamband från en explosion av 125 kg TNT på ett avstånd av 5 m vid möjlighet till fri avlastning. Trycket motsvarar lastkraven på ett skyddsrum som ställs i Skyddsrum SR06, Räddningsverket (2006).*

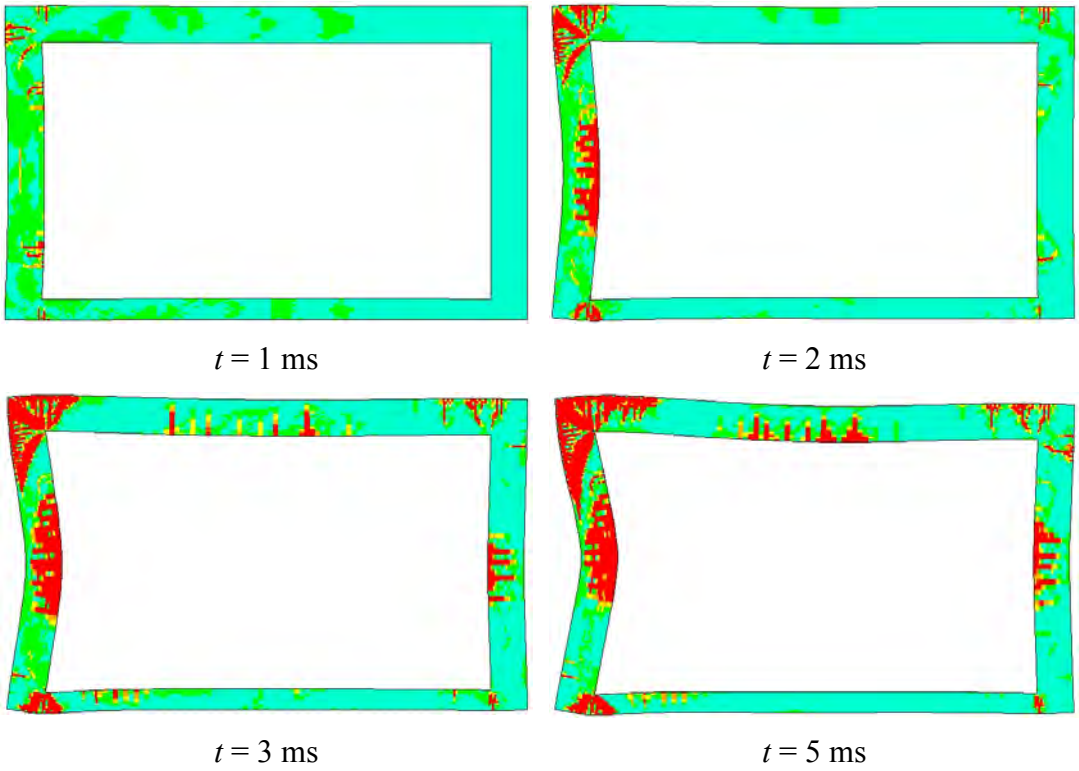


Figur 3.2 *Principiell skillnad i nivå och varaktighet hos last mot skyddsrum när denna betraktas som en explosionslast respektive ekvivalent statisk last. Baserat på lastkriterier givna i Räddningsverket (2006).*

3.1.2 Respons vid en explosionslast

I föregående avsnitt introduceras begreppet statisk ekvivalentlast och även om denna metodik är användbar för att bedöma den maximala påkänningen i en konstruktion är det värt att poängtera att den initiala globala responsen hos en dynamiskt belastad konstruktion märkbart kan skilja sig mot vad som fås vid en belastning av motsvarande ekvivalenta statiska lastfall. Om lasten påförs tillräckligt snabbt är det till och med möjligt att en del av strukturen går till lokalt brott innan en annan konstruktionsdel ens påverkats. Anledningen till detta är att det tar tid för informationen om en yttre last att färdas genom materialet och konstruktionens respons i de inledande skedena kan därför betraktas som att dess randvillkor är tidsberoende.

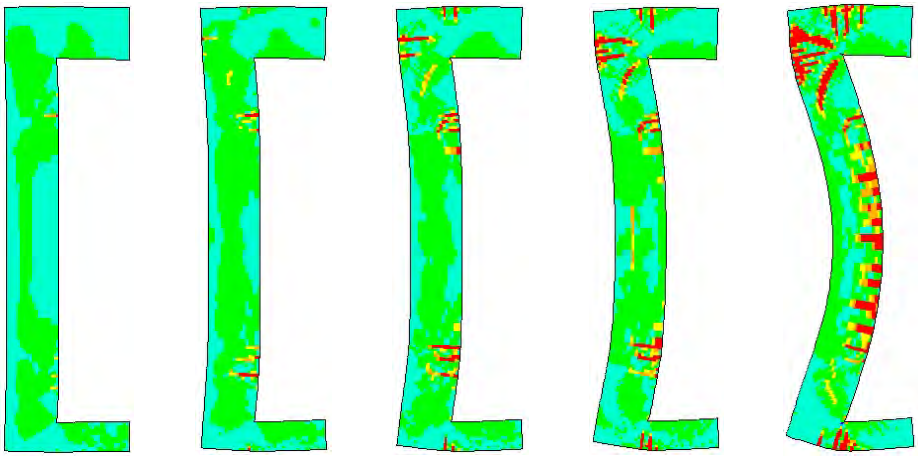
Som exempel på detta illustreras i Figur 3.3 responsen hos det i Figur 3.1 belastade skyddsrummet där erhållen deformation och sprickbildning visas efter 1, 2, 3 respektive 5 ms efter påbörjad belastning. Efter 1 ms har den bakre delen av skyddsrummet ännu inte påverkats av pålagd last och det kan konstateras att den bakre väggen vid denna tidpunkt fortfarande är ”ovetande” om att den främre väggen ens belastats. För betong är den longitudinella våghastigheten ungefär 3500 m/s och det tar därför ytterligare omkring 0,4 ms (5,0 m / 3 500 m/s ≈ 1,4 ms) innan information om lastens verkan på den främre väggen når fram till den bakre väggen och denna börjar uppvisa någon form av respons. Efter 2 ms kan också en inledande respons i den bakre väggen skönjas, påminnande om den som erhölls i den främre väggen efter 1 ms. Vid denna tidpunkt har det också i den främre väggen utvecklats en betydande sprickbildning (markerat med rött) i framförallt väggmitt och det övre hörnet. Än så länge är dock skadorna i tak och golvplatta obefintliga och det är först efter 3 ms som sådana börjat utvecklas i skyddsrummet. Efter omkring 5 ms, dvs. ungefär 2 ms efter det att explosionslasten i princip försvunnit, fås de största påkänningarna i den främre väggen och det är i princip detta skede hos den främre väggen som beskrivs av den ekvivalenta statiska last som visas i Figur 3.2. Sålunda kan det konstateras att det för en dynamiskt belastad konstruktion inte nödvändigtvis finns ett direkt samband mellan maximal lastnivå och maximal påkänning i den utsatta strukturen, något som också skiljer sig från en statiskt belastad konstruktion.



Figur 3.3 Respons i skyddsrum av explosion mot den vänstra väggen. Deformationerna är uppförstorade 20 gånger och röd färg markerar fullt utvecklade sprickor. Från Johansson (1999).

I Figur 3.4 illustreras den sprickbild och deformation som den vänstra väggen i Figur 3.3 erhåller under de inledande 1,5 ms. Av detta framgår de tidsberoende randvillkoren tydligt, exempelvis uppför sig väggen som om det övre vänstra hörnet var fast inspänt och inte en del av en ramkonstruktion. Vidare uppstår de första sprickorna på väggens insida i ett område nära de båda hörnen, något som inte är att förvänta vid en statisk belastning för en konstruktion med aktuella randvillkor. Anledningen till detta är dock att tidsberoende randvillkor gör att väggen inledningsvis

kröker sig kraftig i dessa punkter vilket medför uppkomst av sprickor i betongen här. Anledningen till detta är att informationen om den yttre lasten ännu inte hunnit sprida sig ordentligt genom konstruktionen och väggen beter sig därför inledningsvis som en stel platta – när de första sprickorna uppstår efter omkring 0,3 ms är den horisontella förskjutningen fortfarande densamma för hela väggdelen mellan sprickorna. Böjsprickorna i väggmitt framträder inte förrän efter omkring 1,5 ms vilket kan tolkas som att det är först vid denna tidpunkt som väggen börjar uppföra sig som en statiskt belastad konstruktion förväntas göra.



t = 0,4 ms t = 0,6 ms t = 0,8 ms t = 1,0 ms t = 1,5 ms

Figur 3.4 Initial respons hos vänster skyddsrumsvägg i Figur 3.3 där nedre och övre hörnet motsvarar ledat respektive fast inspänning. Deformationerna är uppförstorade 100 gånger och röd färg markerar fullt utvecklade sprickor. Från Johansson (1999).

Av Figur 3.3 och Figur 3.4 framgår klart att impulsbelastningens inverkan på den lokala och globala responsen kan vara stor. Inom ett givet tvärsnitt är responsen dock snarlik den som uppstår vid statisk belastning varför de normala analysmetoder av belastade tvärsnitt som används vid statisk belastning kan tillämpas även här vid dynamisk belastning.

3.1.3 Hur ska man skydda sig?

Det finns ett antal grundläggande medel för att skydda sig mot effekten av en explosion, vari de primära skyddsåtgärderna är

- avstånd,
- skyddande massa.

Anledningen till varför dessa parametrar är av sådan vikt har sin grund i förbrukning av den energi som en explosion frigör. Ett ökande avstånd medför att frisläppt energi tunnas ut över en större volym, något som medför en lägre last, medan en ökad skyddande massa kräver en större energimängd för att sättas i rörelse och därmed minskar effekten av den last som verkar på en konstruktion.

Det enklaste och effektivaste sättet att skydda sig från en explosion är helt enkelt att befinna sig någon annanstans! Detta kan tyckas självklart men är ändå värt att poängtera eftersom det utgör det viktigaste grundkonceptet om skydd mot denna typ av laster. Detta möjliggör även ett effektivt

användande av olika typer av barriärer för att skydda en konstruktion. Syftet med sådana barriärer är ofta inte att utgöra ett effektivt explosionsskydd i sig utan snarare till att hindra en potentiell lastkälla från att komma för nära den byggnad eller verksamhet som önskas skyddas. Exempel på sådana barriärer kan exempelvis vara den mur som omgärdar en ambassad eller pollare uppsatta vid en bank för att säkerställa ett visst miniavstånd mellan tillträde och byggnad. Detta är en inte helt ovanlig åtgärd vid exempelvis offentliga byggnader i USA. Ett annat sätt att säkerställa tillräckligt avstånd från en möjlig hotkälla kan vara att placera sin verksamhet tillräckligt högt upp i luften, dvs. önskat säkerhetsavstånd uppfylls genom att aktuella lokaler förläggs på exempelvis tionde våningen i en robust byggnad, varvid ett tillräckligt avstånd till eventuella hot på gatunivå effektivt kan uppfyllas.

Det är dock inte alltid möjligt att uppfylla önskat avståndskriterium så när en konstruktion väl utsätts för en extrem belastning är det av vikt att den har erforderlig förmåga att hantera detta. För en byggnad som förväntas utsättas för extrem impulsbelastning är det generellt därför av vikt att den är rätt utformad så att den kan uppvisa en seg strukturell respons med bibehållen bärförmåga. En seg respons hos utsatt konstruktion säkerställer en effektiv energiupptagande förmåga med möjlighet till kraftomlagringar så att ett lokalt brott inte leder till total kollaps. Denna devis gäller även vid statisk belastning men är särskilt viktigt i samband med exceptionella dynamiska pålastningar såsom är fallet vid explosionslast. För en konstruktion utsatt för en sådan lasttyp är det inte ett tvärtsnitts maximala lastkapacitet som är av primärt intresse utan det är dess totala energiupptagande förmåga, dvs. dess deformationsförmåga i kombination med tillhörande lastupptagning, som blir viktig för dess lämplighet som skydd.

Beaktandet av extrema dynamiska laster mot bebyggelsen grundar sig på en riskbedömning. Bedöms risken vara stor för att en given byggnad drabbas av en olycka/attentat skall detta också belysas av vidtagna åtgärder, jämför flödesschema i Figur 2.1. En sådan åtgärd kan vara aktiv eller passiv – aktiv i form av ett säkerhetsavstånd mellan en transportled och en kontorsbyggnad eller passiv via erforderligt utformade väggar och tak i en tunnel för att klara en invändig explosion. I de fall där den ena eller andra åtgärden är otillräcklig får erforderliga kombinationer av dessa göras.

3.2 Grundläggande dynamiska begrepp

3.2.1 Orientering

För att förstå vad som sker när stötvågen från en explosionslast träffar en byggnad är det nödvändigt att vara familjär med grundläggande dynamiska begrepp. En övergripande genomgång av sådana ges därför i detta avsnitt. Informationen är av allmän karaktär och återfinns i olika former inom litteraturen men presenterat material har sin grund från Ekengren *et al.* (2005).

3.2.2 Kraft och tryck

Begreppet kraft kan definieras som förmågan att accelerera en kropps massa. Sambandet mellan kraft, massa och acceleration bestäms av Newtons accelerationslag som

$$F = m \cdot a \tag{3.1}$$

där F är kraft, m är kroppens massa och a kroppens acceleration. Vid luftstötvågsbelastningar används storheten tryck, P, för att ange kraft per ytenhet. Sålunda gäller

$$P = \frac{F}{A} \tag{3.2}$$

där F är den kraft som verkar på ytan A.

3.2.3 Rörelsemängd, impuls och impulstäthet

Rörelsemängden p hos en kropp med massan m och hastigheten v definieras som

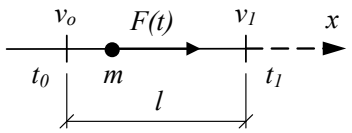
$$p = m \cdot v \tag{3.3}$$

Om denna kropp innehar hastigheten v_0 och påverkas av en kraft $F = F(t)$ under tiden $t_0 \leq t \leq t_1$, se Figur 3.5, fås en förändring i rörelsemängd enligt

$$m \cdot v_1 = m \cdot v_0 + \int_{t_0}^{t_1} F(t)dt \tag{3.4}$$

där integralen i högra ledet benämns som den till kroppen överförda impulsen I, *dvs.*

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F(t)dt \tag{3.5}$$



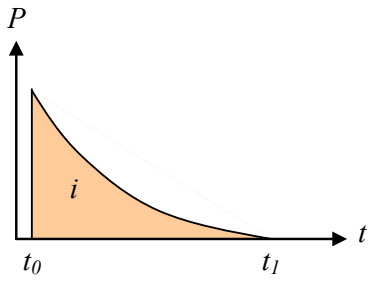
Figur 3.5 Förändring av rörelsemängd på grund av en yttre krafts påverkan på en kropp.

I samband med luftstötvågsbelastningar med trycket P angivet som funktion av tiden $P = P(t)$ används begreppet impulstäthet, varmed avses impulsen per ytenhet definierad som

$$i = \int_{t_0}^{t_1} P(t)dt \tag{3.6}$$

I Figur 3.6 är impulstätheten i lika med arean under tryck-tidskurvan $P(t)$ och om detta belastar en yta med arean A tillförs denna den totala impulsen

$$I = i \cdot A = A\int_{t_0}^{t_1} P(t)dt \tag{3.7}$$



Figur 3.6 Impulstätheten i är arean under tryck-tidssambandet.

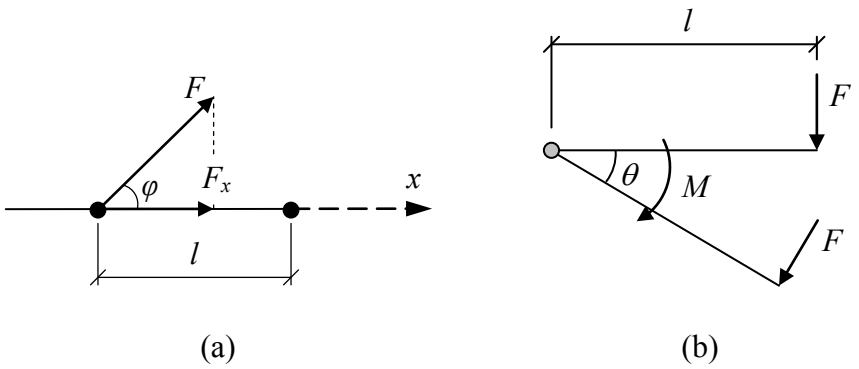
3.2.4 Arbete och rörelseenergi

Om en kraft F angriper i en punkt och denna förflyttas en sträcka u, se Figur 3.7a, uträttar kraften arbetet

$$W = F \cdot u \cdot \cos\varphi = F_x \cdot u \tag{3.8}$$

där φ är vinkel mellan kraften och förskjutningsriktningen och F_x är kraftens projektion i rörelsens riktning. För en variabel kraft kan uträttat arbete uttryckas som

$$W = \int_0^u F_x(x)dx \tag{3.9}$$



Figur 3.7 En krafts uträttande av arbete.

Ett motsvarande mått är det arbete som ett moment M, definierat i Figur 3.7b som,

$$M = F \cdot l \tag{3.10}$$

uträttar vid en rotation θ

$$W = M \cdot \theta \tag{3.11}$$

vilket generellt uttryckt blir

$$W = \int_0^{\theta} M(\alpha) d\alpha \tag{3.12}$$

Rörelseenergin, eller den kinetiska energin, E_k för en kropp med massan m och hastigheten v är

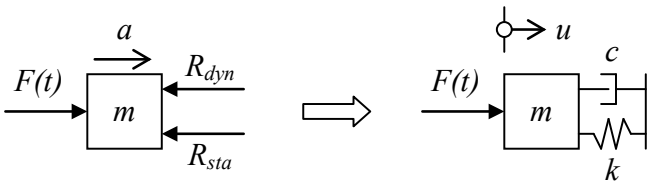
$$E_k = \frac{m \cdot v^2}{2} \tag{3.13}$$

Arbete och kinetisk energi utgör båda energimått och ställs normalt emot varandra för att bedöma den totala rörelse som fås hos en explosionsbelastad konstruktion.

3.2.5 Dynamisk grundekvation

Den dynamiska grundekvationen utgår från Newtons andra lag, se ekvation (3.1). De krafter som verkar på en kropp kan dock delas upp, såsom schematiskt visas i Figur 3.8, i en yttre kraft *F(t)* samt inre krafter R_{sta} och R_{dyn} där de senare syftar på statiskt respektive dynamiskt inre motstånd, dvs.

$$F(t) - (R_{sta} + R_{dyn}) = m \cdot a \tag{3.14}$$



Figur 3.8 Schematisk illustration av krafter verkande på en accelererande massa.

För en linjärelastisk respons kan de inre motstånden uttryckas som

$$R_{sta} = ku \tag{3.15}$$

$$R_{dyn} = c\dot{u} \tag{3.16}$$

där k motsvarar en linjär fjäderstyvhet, u är kroppens förskjutning, c en dämpning och $\dot{u}$ kroppens hastighet. Dessa uttryck insatt i ekvation (3.14) resulterar slutligen i det vanligen använda uttrycket för den dynamiska grundekvationen

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F(t) \tag{3.17}$$

där $\ddot{u}$ är kroppens acceleration.

3.3 Kritiska parametrar – hur bör man bygga?

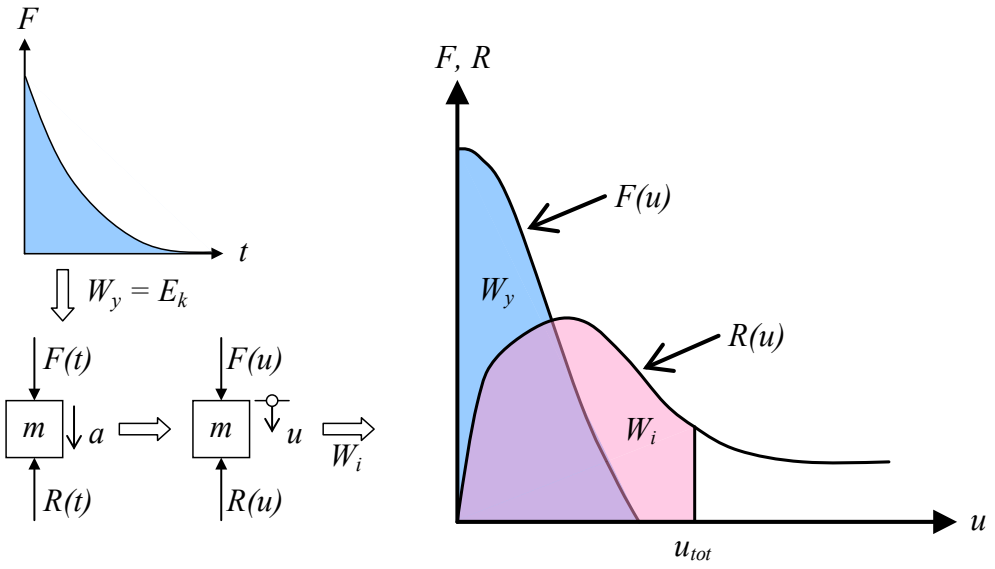
3.3.1 Orientering

Den befintliga bebyggelsen är en tillgång som genomgår en ständig förändring i form av nybyggnation och/eller kompletterande funktionsändringar. Inom byggandet pågår en ständig utveckling av material, byggteknik och konstruktionslösningar. Detta innebär att det finns skillnader i metodik och byggnadsmaterial idag jämfört med för exempelvis 20 år sedan. Det är därmed också möjligt att förutsättningarna för bebyggelsen kan förändras i sådan grad att de dimensioneringsmetoder som idag används för att beakta dynamiska påfrestningar blir otillräckliga. Detta belyser faran med att vara nöjd med de förenklade dimensioneringsverktyg som till stor del används idag eftersom den bakomliggande fysiken då lätt kommer i skymundan, eller i värsta fall, faller i glömska. Vidare finns det också en risk i att okritiskt nyttja befintliga tumregler och förenklingar vid dimensionering med tanke på den förändring som ingående material och konstruktionslösningar genomgått sedan dessa ursprungligen togs fram. Ändrade förutsättningar kan således medföra att dagens beräkningsanvisningar inte längre är representativa för det som önskas kontrolleras, något som gör att det finns en ökad risk att ödesdigra misstag begås.

3.3.2 Energiupptagningsförmåga

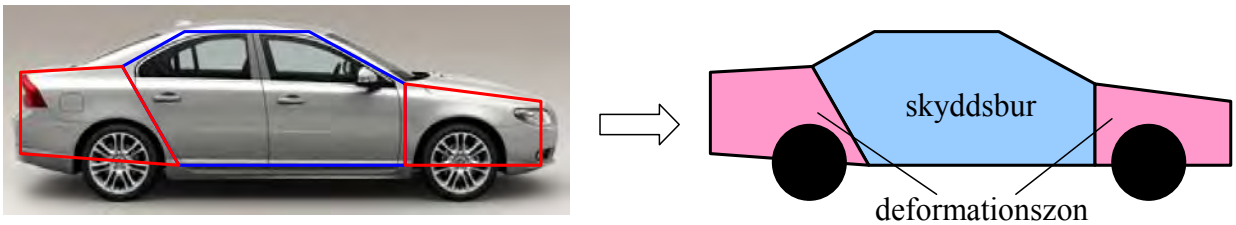
3.3.2.1 Orientering

Som översiktligt berörts i avsnitt 3.1.3 så är den totala energiupptagningsförmågan en primär parameter för en konstruktion utsatt för en explosionslast. Den rörelseenergi E_k som förs in i en impulsbelastad konstruktion kan betraktas som ett yttre arbete W_y som ska balanseras av ett inre arbete W_i, såsom schematiskt illustreras av Figur 3.9. I figuren ger impulslasten $F(t)$ upphov till en rörelseenergi E_k hos en kropp med massa m. Denna energi kan betraktas som ett yttre arbete W_y, vilket enligt ekvation (3.9) fås som en integrering av det resulterande yttre last-deformationssambandet $F(u)$ som verkar på kroppen. Den inre energin W_i beskrivs på motsvarande sätt men baserat på den inre kraft $R(u)$ som alstras i konstruktionen. Hur detta samband, och därmed fördelningen av den inre energin, ser ut beror på ingående material och utformning och varierar således för olika konstruktioner. Generellt gäller dock att för en styv konstruktion fås små deformationer men stora krafter medan det för en vek konstruktion blir stora deformationer i kombination med små krafter.

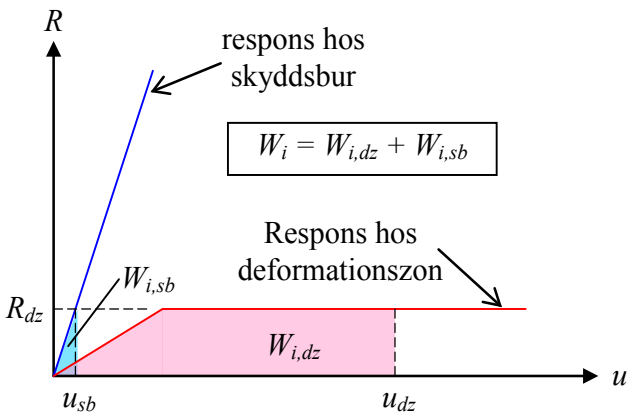


Figur 3.9 *Schematisk bild av yttre arbete W_y, orsakad av en yttre last F(u), och inre energi W_i, alstrad av en inre kraft R(u). Energibalans, $W_y = W_i$, avgör resulterande slut-deformation u_{tot} hos impulsbelastad konstruktion.*

En jämförelse kan göras med hur ett fordon är uppbyggt där en såkallad skyddsbur för passagerarna omges av en deformationszon i fronten respektive bakpartiet, se Figur 3.10. Syftet med deformationszonen är att vid händelse av en kollision absorbera stöten i fordonet för att minimera åverkan på passagerare som befinner sig i skyddsburen. Skyddsburen utgörs av en styv konstruktion med hög hållfasthet medan fronten och bakpartiet är utformade med en kombination av låg hållfasthet och god deformationsförmåga. Schematiskt kan skillnaden i den strukturella responsen hos dessa båda delar illustreras enligt Figur 3.11. Vid en kollision omvandlas fordonets rörelseenergi till ett yttre arbete W_y som gemensamt ska tas upp av skyddsbur och deformationszon. Genom att låta deformationszonen ha en lägre styvhet i kombination med låg hållfasthet R_{dz} och god deformationsförmåga fås ett fall där energiupptagningen $W_{i,dz}$ i deformationszonen är dominerande över det arbete $W_{i,sb}$ som uträttas av skyddsburen, dvs. $W_{i,dz} >> W_{i,sb}$, vilket är önskvärt.



Figur 3.10 *Skyddsbur och deformationszon hos ett fordon.*



Figur 3.11 Schematisk energiupptagningsförmåga W_i hos fordon med skyddsbur och deformationszon enligt Figur 3.10.

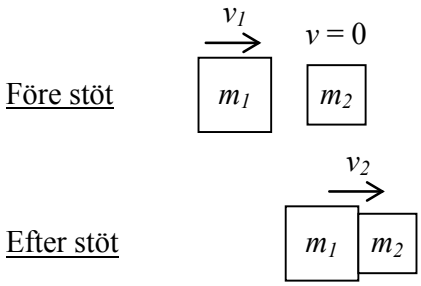
3.3.2.2 Massans betydelse

Som framgår av ekvation (3.1) så anger Newtons andra lag att en kraft som verkar på en kropp kan uttryckas som produkten av kroppens massa och acceleration. Av detta inses att det för att generera en acceleration a hos en kropp med massan m krävs en ökad kraft F med ökande storlek på massan

$$a = \frac{F}{m} \tag{3.18}$$

Annorlunda uttryckt innebär detta också att den acceleration som genereras av en given kraft kommer minska proportionellt med ökande massa. Således medför en ökad massa också en minskad respons hos utsatt kropp.

Vid en kortvarig belastning, exempelvis orsakat av trycket från en stötvåg eller fallande rasmassor, kan en stor kraft verka under en mycket begränsad tidsperiod. I samband med en sådan typ av belastning, såkallad stötlast, är det därför inte längre relevant att prata om storleken på den verkande kraften utan snarare om den impuls, se avsnitt 3.2.3, som överförs till utsatt kropp. Figur 3.12 visar schematiskt hur en kropp med massan m_1 kommer farande med en hastighet v_1 mot en stillastående massa med massan m_2. Denna inkommande massa m_1 kan förenklat sägas representera antingen impulsen från en stötvåg eller massan från ett fordon som krockar med någon form av barriär eller rasmassor som faller ner på ett bjälklag i en byggnad.



Figur 3.12 Schematisk bild av en massa m_1 som med hastigheten v_1 far in i en stillastående massa m_2. Med antagande om plastisk stöt får massorna m_1 och m_2 efter stöten en gemensam hastighet v_2.

När massan m_1 når fram till massan m_2 fås en plastisk stöt, vilket innebär att de båda kropparna rör sig tillsammans åt samma håll med samma hastighet v_2. Med utgångspunkt i lagen om bevarad rörelsemängd före och efter en stöt fås att

$$m_1 \cdot v_1 = (m_1 + m_2) \cdot v_2 \tag{3.19}$$

vilket leder till att hastigheten v_2 efter stöt kan skrivas som

$$v_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 \tag{3.20}$$

Rörelseenergin hos den inkommande massan m_1 (fordonet) kan beräknas som

$$E_{k,1} = \frac{m_1 \cdot v_1^{\,2}}{2} \tag{3.21}$$

medan rörelseenergin för den totala massan m_1+m_2 efter stöt blir

$$E_{k,2} = \frac{(m_1 + m_2) \cdot v_2^{\,2}}{2} \tag{3.22}$$

Med användande av uttryck för hastigheten v_2 i ekvation (3.20) kan detta skrivas om och förenklas som

$$E_{k,2} = \frac{(m_1 + m_2)}{2} \cdot \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 \right)^2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{m_1 \cdot v_1^{\,2}}{2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot E_{k,1} \tag{3.23}$$

vilket innebär att $E_{k,2} < E_{k,1}$. Dvs. energi går förlorad vid en plastisk stöt och mängden energi som förbrukas beror på storleken hos inblandade massor. Den kvarvarande rörelseenergin $E_{k,2}$ ska därefter tas upp av mothållande inre krafter hos utsatt konstruktion.

Ovanstående resonemang lämpar sig bäst när den infallande massan verkligen består av en väl definierad massa, såsom exempelvis är fallet för ett fordon som krockar med någon form av barriär eller rasmassor som faller ner på ett bjälklag i en byggnad. Vid en explosionsbelastning uttrycks dock belastningen som en impuls varför den resulterande rörelseenergi som ska tas upp av motsvarande inre krafter baseras på nedanstående resonemang.

Inverkan av en impuls I på en kropp med massan m kan tecknas som

$$I = mv \tag{3.24}$$

och rörelseenergin E_k hos samma kropp med hastigheten v kan uttryckas som

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \tag{3.25}$$

vilket tillsammans ger att rörelseenergin hos belastad kropp kan uttryckas som

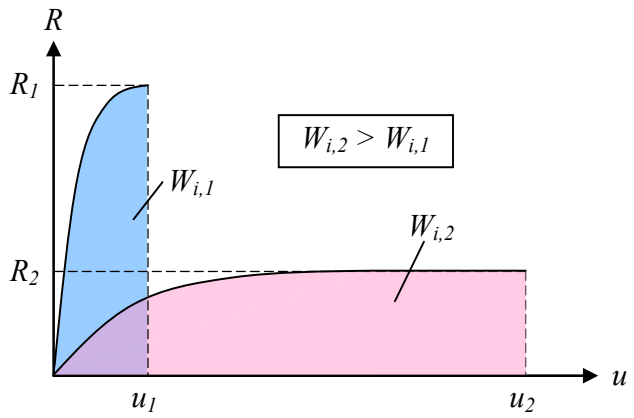
$$E_k = \frac{I^2}{2m} \tag{3.26}$$

Av detta framgår, på ett sätt motsvarande uttrycket i ekvation (3.18), att en ökad massa medför ett omvänt proportionellt behov av energiupptagningsförmåga i utsatt konstruktionsdel. Detta resonemang återkommer i kapitel 4 varvid även den inre energiförbrukningen hos utsatt konstruktion behandlas.

3.3.2.3 Inverkan av styvhet, hållfasthet och deformationsförmåga

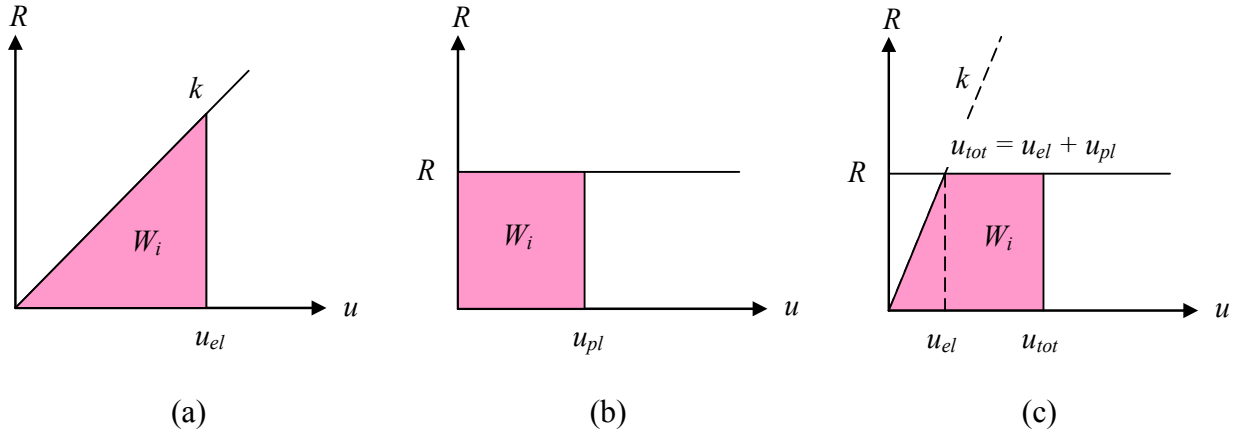
För en statiskt belastad konstruktion är det normalt av intresse att kunna bära en given last med begränsade deformationer. I ett sådant läge blir styvhet och lastkapacitet dimensionerande för att uppfylla ställda krav. För en konstruktion utsatt för en kraftig impulslast kan det dock i många fall vara i princip omöjligt att påvisa att den aktuella lasten aldrig når en nivå som motsvarar den maximala statiska lastkapaciteten. I ett sådant läge blir det därför både nödvändigt och önskvärt att utnyttja konstruktionens eftergivlighet istället.

Energiupptagningsförmågan hos en konstruktion utgörs av ett samspel mellan kraft och resulterande deformation. Detta kan innebära att en låg lastkapacitet i kombination med god deformationsförmåga kan resultera i en större energiupptagningsförmåga än kombinationen hög lastkapacitet men låg deformationsförmåga, se Figur 3.13. För en impulsbelastad konstruktion är det ofta viktigare att uppvisa en god deformationsförmåga, med möjlighet till hög energiförbrukning, än hög styvhet och bärförmåga. Den betydelse som dessa båda senare egenskaper har hos en statiskt belastad konstruktion minskar således hos en impulsbelastad konstruktion. Avvikelser från detta tankesätt finns dock. För exempelvis en pelare kan det fortfarande vara viktigt att hållfastheten är så hög att erforderlig styvhet kan bibehållas och deformationerna begränsas i erforderlig grad för att inte samverkan mellan deformerad pelare och aktuell vertikal last, via andra ordningens effekter, ska ge upphov till kollaps.



Figur 3.13 Schematisk jämförelse av konstruktion med en kombination av hög styvhet och låg deformationsförmåga med en konstruktion med låg styvhet och hög deformationsförmåga.

Betydelsen av en konstruktions styvhet, hållfasthet och deformationsförmåga beskrivs här utgående från tre typer av responser i form av ett elastiskt[2], ett plastiskt respektive ett elastoplastiskt beteende, se Figur 3.14. Dessa typer utgör en förenkling av verkligheten men fungerar bra som approximation för många olika konstruktioner samt för att illustrera skillnaden i uppförande mellan dessa. För en rent linjärelastisk respons finns ingen övre kapacitetsgräns R, istället antas konstruktionen uppvisa en konstant styvhet k. Den deformation u_{el} som fås vid belastning betecknas som helt elastisk och kommer återgå till noll när konstruktionen är obelastad. Vid en rent plastisk respons är det kapaciteten R som beskriver konstruktionens beteende och den resulterande deformationen u_{pl} är helt plastisk, dvs. helt kvarstående deformation. Den elastoplastiska responsen, slutligen, utgör ett mellanting av de båda första och uppvisar en initial styvhet k tills dess att kapaciteten R uppnåtts. Upp till denna last är beteendet elastiskt med fullständigt återgående deformation men därefter fås ett plastiskt beteende där uppkomna plastiska deformationer u_{pl} förblir permanenta.



Figur 3.14 Strukturell respons med antagande om (a) linjärelastisk respons, (b) plastisk respons, (c) elastoplastisk respons

Begreppet seghet används här som ett mått på konstruktionens plastiska deformationsförmåga, vilket innebär att det inte används alls för en elastisk konstruktion. För en konstruktion med plastisk respons kopplas segheten till den kvarstående deformationen u_{pl}. På samma sätt anses här inte begreppet styvhet vara aktuellt för en rent plastisk modell utan är enbart kopplad till den elastiska responsen och den temporära, återgående deformationen, u_{el}.

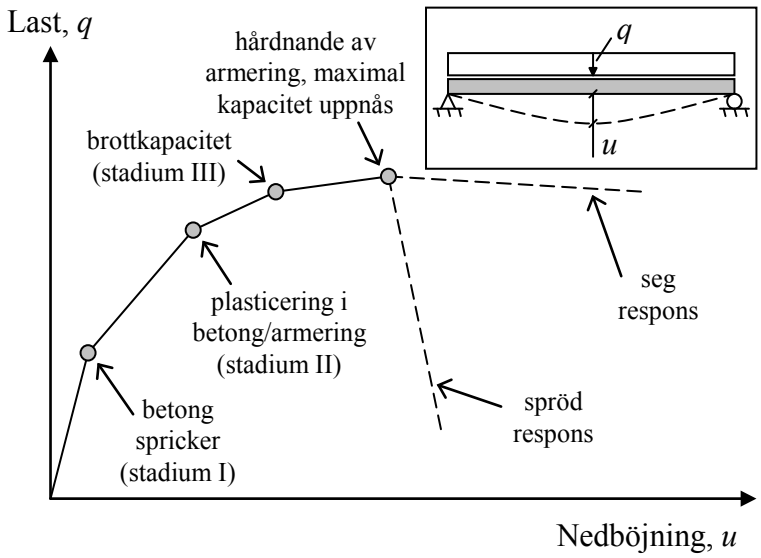
[2] Med elastisk och plastisk respons syftas i den här rapporten genomgående till linjärelastisk respektive idealplastisk respons.

3.3.3 Hur säkerställa en seg respons

3.3.3.1 Orientering

Av ovanstående resonemang har det framkommit att en seg konstruktion är nyckeln till en sund lastupptagningsförmåga av en explosionslast. Dvs. det är i regel effektivare att uppnå en seg konstruktion än att den kan uppvisa en hög hållfasthet. Med detta som bakgrund är det naturligt att söka sätt att säkerställa ett segt uppförande hos konstruktionen.

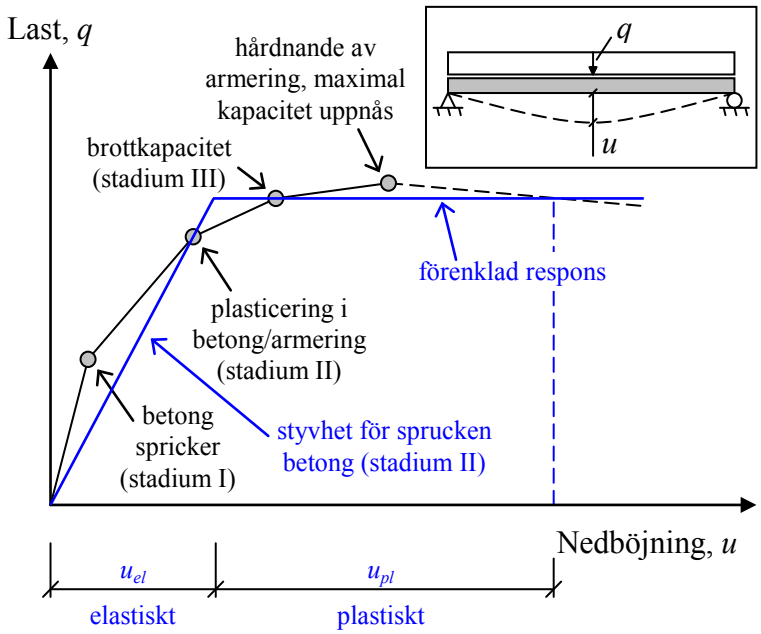
En betongkonstruktion har goda förutsättningar för att uppvisa ett segt beteende där ett exempel på ett typiskt last-deformationssamband för en belastad betongbalk ges i Figur 3.15. Beroende på utformning och egenskaper hos armering i betongbalken kan en seg eller spröd respons erhållas. En seg respons medför att såkallade flytleder kan utvecklas – områden där armeringen plasticerar och tvärsnitten kan bibehålla sin lastkapacitet med ökande deformation – vilket möjliggör kraft-omlagringar i konstruktionen och därmed också ökad energiupptagningsförmåga.



Figur 3.15 Schematisk figur av strukturell respons hos armerad betongbalk då denna uppvisar en seg respektive en spröd respons.

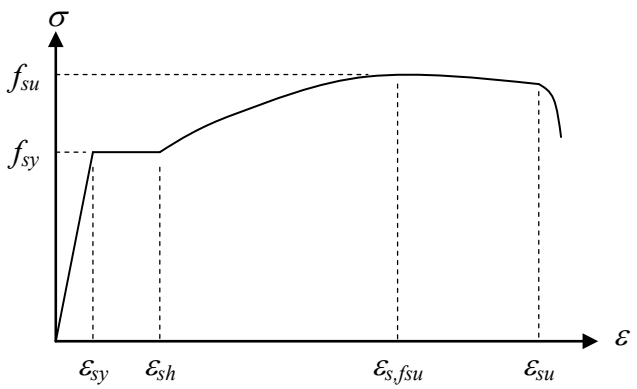
3.3.3.2 Seghet i nyttjade material

I avsnitt 3.3.2.3 introduceras förenklade arbetskurvor för olika typer av responser. Dessa arbets-kurvor utgör i mångt och mycket idealiserade samband som i verkligheten är mer komplexa. Exempelvis kan det i Figur 3.15 givna last-deformationssambandet förenklas till en elastoplastisk respons där den spruckna styvheten (stadium II) beskriver balkens elastiska del och brottkapaciteten (stadium III) utgör en övre gräns för lastkapaciteten, se Figur 3.16. Den plastiska deformations-förmågan u_{pl} markerar tillåten deformation med bibehållen lastkapacitet.



Figur 3.16 Förenklat elastoplastisk respons hos armerad betongbalk där styvheten i stadium II beskriver balkens elastiska del.

En armerad betongkonstruktion kan betraktas som en komposit bestående av betong och armering[3]. Betong är bra på att ta tryck och armering bra på att ta drag, vilket gör att en väl fungerande kraftjämvikt kan uppstå i materialet och yttre laster bäras effektivt. Segheten hos en sådan komposit beror på de ingående materialens egenskaper. I jämförelse med stål är betong dock ett sprött material varför en betongkonstruktions förmåga att uppvisa en seg respons till stor del vilar på armeringens egenskaper. Dvs. utseendet hos den ingående armeringens arbetskurva, schematiskt illustrerad i Figur 3.17, har avgörande betydelse.



Figur 3.17 Schematisk figur av armeringens arbetskurva definierande flytspänning f_{sy}, brottspänning f_{su} samt flyttöjning ε_{sy}, töjning vid hårdnande ε_{sh} och brottöjning $\varepsilon_{s,fsu}$.

[3] Armeringen förutsätts här utgöras av stål med en arbetskurva motsvarande den i Figur 3.17.

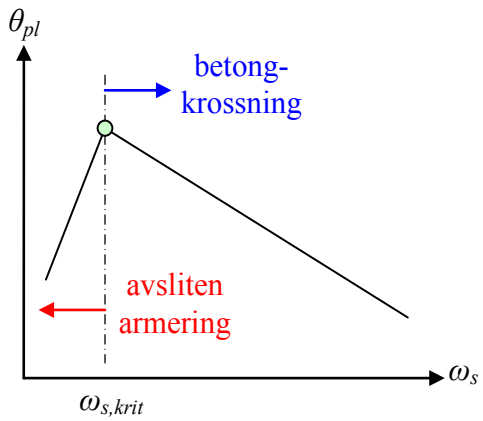
Som berörs i avsnitt 3.3.3.1 beror en betongkonstruktions deformationsförmåga på möjligheten att utveckla effektiva flytleder. En flytled uppstår när armeringen plasticerar (flyter) och tvärsnittet uppnår, samt bibehåller, sin maximala kapacitet med ökande deformation. Nyckeln till ett sådant beteende är att armeringen kan förlänga sig i nödvändig grad så att den deformationslängd som behövs inryms i flytleden. En förutsättning för detta är att armeringen efter flytning når sin gräns för hårdnande ε_{sh}, se Figur 3.17, varvid flytningen kan sprida sig i armeringen på ömse sidor om sprickan. Här görs ingen djupare analys av vilken betydelse olika parametrar har utan det konstateras enbart att ett högt värde på kvoten

$$\gamma = \frac{f_{su}}{f_{sy}} \tag{3.27}$$

mellan armeringens brottspänning f_{su} och flytspänning f_{sy} är ett avgörande villkor för att en betongkonstruktion ska uppvisa en seg respons vid brott, se Johansson (1997). Denna kvot beskriver på ett förenklat sätt armeringens hårdnande när dess flytgräns uppnåtts och kan användas som ett mått på armeringsstålet seghet. Ett högt värde på denna kvot medger också, förutsatt en arbetskurva motsvarande den i Figur 3.17, en god deformationsförmåga i konstruktionen.

3.3.3.3 Armeringsutformning

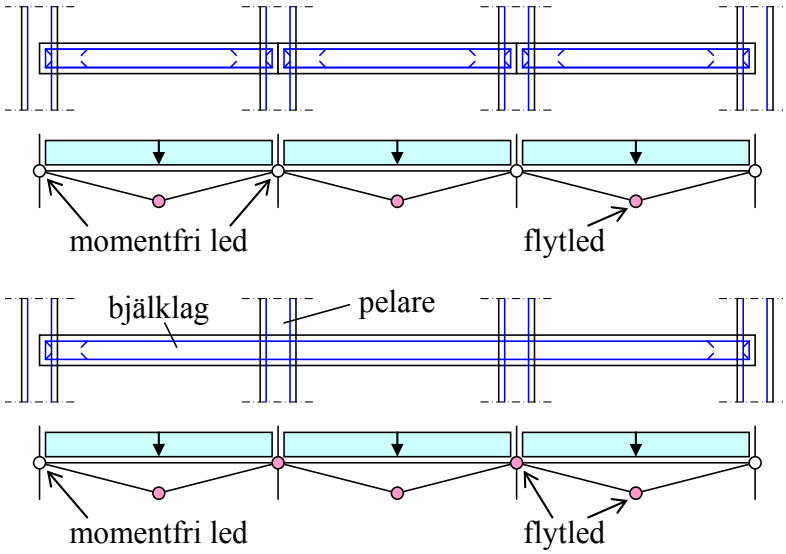
Allmänt gäller att små armeringsmängder i en betongkonstruktion resulterar i bättre deformationsförmåga än stora armeringsmängder. Detta förutsätter dock att brott inte erhålls i armeringen – slits denna av minskar rotationskapaciteten drastiskt – utan att det är den tryckta betongen som utgör tvärsnittets svaga punkt. Detta är också normalfallet men avvikelser kan uppstå vid låga kvoter på den mekaniska armeringskvoten ω_s, något som erhålls vid en kombination av små armeringsmängder, låg flytgräns hos armeringen och/eller hög tryckhållfasthet hos betongen, se avsnitt 4.8.2.2. Detta illustreras schematiskt i Figur 3.18 där den plastiska rotationsförmågan θ_{pl} hos ett armerat betongtvärsnitt ges som funktion av ω_s. För $\omega_s > \omega_{s,krit}$ fås krossning av betongen och för $\omega_s < \omega_{s,krit}$ fås avslitning av armeringen.



Figur 3.18 Schematisk illustration av tillåten plastisk rotationsförmåga θ_{pl} som funktion av den mekaniska armeringskvoten ω_s samt effekt av olika brottkriterier.

3.3.3.4 Kontinuitet hos byggnadsdelar

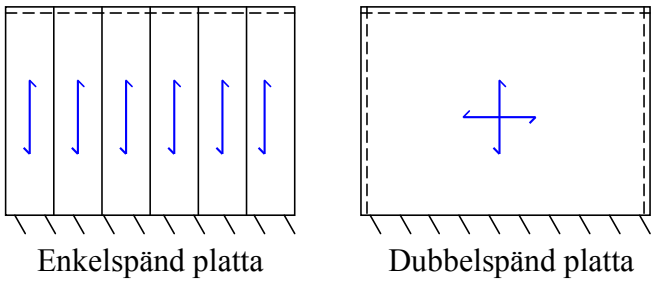
Genom att utföra väggar och bjälklag med momentinspända kopplingar, såsom schematiskt visas i Figur 3.19, säkerställs en ökad motståndsförmåga mot explosionslast hos en byggnad. En kontinuerlig dragen armering genom bjälklagen resulterar i en ökad möjlighet till kraftomlagring i konstruktionen eftersom det då kan uppstå fler flytleder än vad som är fallet när bjälklaget enbart läggs upp på respektive pelarupplag. Denna devis innebär även att platsgjutna betongstommar, vilka normalt har en större andel kontinuerliga bjälklag, i regel är mer lämpade utformade att motstå explosionslaster än byggnader uppförda med prefabricerade betongelement.



Figur 3.19 Schematisk bild av bjälklag med enskild respektive kontinuerlig uppläggning av balk.

3.3.3.5 Redundans – flerfaldiga bärsystem

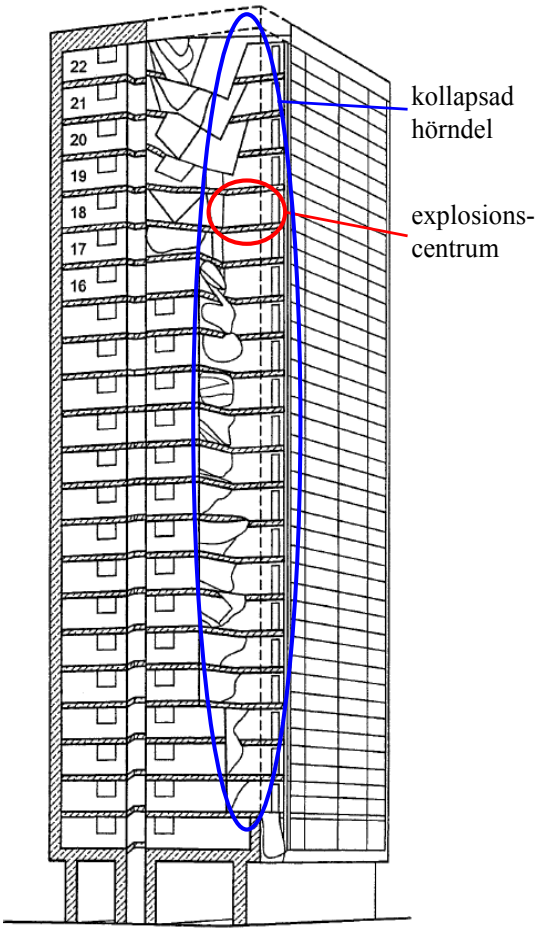
För en byggnad är det viktigt att det finns en inbyggd redundans, dvs. en robusthet som finns att tillgå om behov uppstår. Detta är inte nödvändigtvis en kapacitet som ökar byggnadens eller byggnadsdelens funktionalitet i övrigt utan snarare en reservkapacitet som kan tas i anspråk vid exceptionella tillfällen om någon annan del i systemet fallerar. Användandet av kraftomlagring via flytleder kan på sätt och vis betraktas som en sådan redundans för en enskild byggnadsdel eller förmågan hos ett bjälklag att bära i två riktningar, se Figur 3.20.



Figur 3.20 Bjälklag med bärning i en respektive två riktningar. Bärning i två riktningar ökar bjälklagets redundans.

I denna rapport åsyftas med redundans dock primärt inte bärförmågan hos en lokal konstruktionsdel utan snarare stabiliteten hos hela byggnaden. Dvs. det bärande stomsystemet ska med det här synsättet inte vara avhängigt ett fåtal kritiska delar utan det bör finnas en sådan robusthet i utformningen av denna att en total kollaps kan förhindras även om lokala brott uppstår. Ett exempel på ett sådant system kan vara att det i en hög byggnad bör finns en sådan mängd bärande väggar och pelare att det är möjligt att en eller flera av dessa slås undan utan att total kollaps erhålls. Vid normalt byggande enligt BKR 12, Boverket (2008), beaktas detta exempelvis genom att beaktande av avslagen pelare ska göras, alternativt ska pelaren dimensioneras att tåla en tillräckligt hög last motsvarande påkörning av ett fordon. Detta innebär också att höga byggnader som är starkt beroende av en eller några få bärande delar kan bli känsligare för extrema laster eftersom betydande delar av dess bärförmåga är beroende av dessa.

I Figur 3.21 illustreras skadorna från en känd olycka som inträffade i Ronan Point, London, 1969 där utsatt byggnad uppvisade en otillräcklig redundans. En vecka efter det att huset tagits i drift inträffade en gasexplosion på 18:e våningen. Explosionen slog ut de omgivande bärande väggarna vilket medförde att stödet för ovanliggande våningar försvann och ett fortskridande ras utvecklades där ett hörn av hela byggnaden kollapsade.



Figur 3.21 Explosion i Ronan Point, London, 1969. Baserad på Höglund et al. (2001).

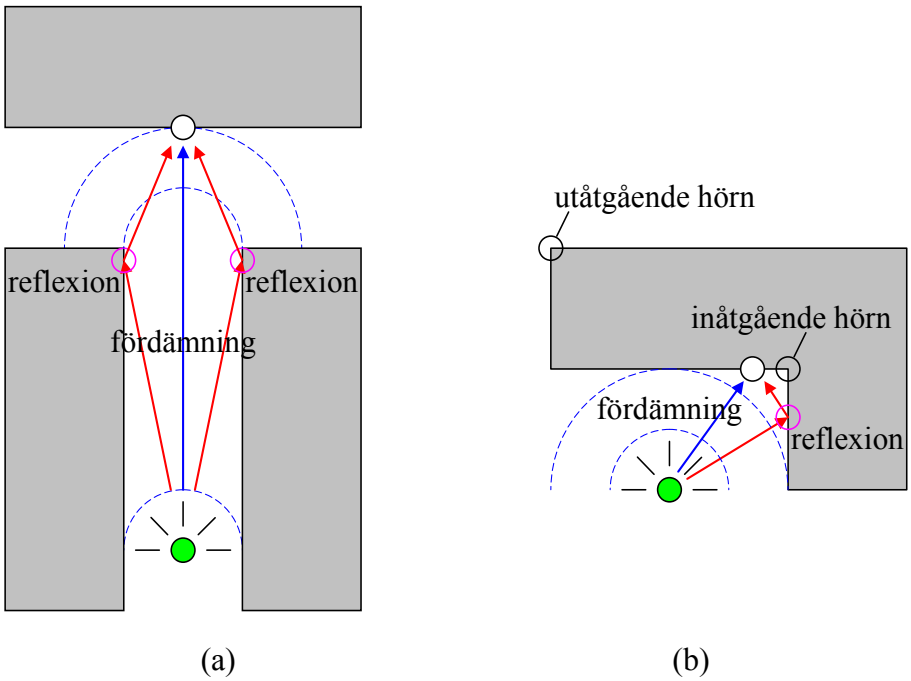
Ett motsatt exempel är den byggnad i centrala Stockholm där restaurang Fontainbleau var belägen och som utsattes för en kraftig sprängladdning på nyårsafton 1982. Explosionen gav upphov till omfattande skador i fastigheten med bland annat utblåsta väggar till följd men den bärande stommen uppvisade tillräcklig motståndsförmåga vilket medförde att en total kollaps av byggnaden undveks, se Figur 3.22.

Figur 3.22 Explosion i restaurang Fontainbleau, Stockholm, 1982. Från Forsén (1984).

3.3.4 ”Smart” utformning av en byggnad

3.3.4.1 Undvik fördämningseffekter

Trycket från en explosionslast beror på den energiintensitet som råder bakom stötvågsfronten. Under förutsättning att stötvågen har möjlighet till att sprida sig över en större volym innebär detta att lasten snabbt minskar med ökande avstånd. Om stötvågen dock förhindras att spridas över en större volym, såkallad fördämning, kommer trycket att bibehållas eller rent av öka. Vid utformning av en byggnad eller kombination av byggnader kan det därför vara värt att beakta hur eventuella fördämningseffekter kan uppstå, se Figur 3.23. Framförallt bör ingående hörn, se Figur 3.23b, undvikas vid utsatta positioner eftersom sådana dels ger upphov till en ökad belastning av kombinerad reflexion och fördämning och dels generellt uppvisar en lägre bärförmåga än utåtgående hörn, se Johansson (2000).



Figur 3.23 Schematisk bild av möjliga fördämningseffekter i bebyggelsen.

3.3.4.2 Fördel med eftergivliga väggar

Den primära uppgiften för en byggnad i bebyggelsen är normalt inte att utgöra skydd för människor mot extrema dynamiska laster såsom explosionslaster. Om en sådan händelse trots allt inträffar utgörs det värsta scenariot för människor inne i byggnaden förmodligen av att denna kollapsar. Ur skyddssynpunkt kan det därför i vissa avseenden därför vara mer fördelaktigt med en byggnad som visserligen inte utgör ett fullgott skydd men som samtidigt undviker total kollaps. I ett sådant fall kan det därför vara bättre med en byggnad med svaga, eftergivliga väggar än starka och styva sådana. Explosionen i Fontainbleau, se Figur 3.22, är ett bra exempel på ett fall när eftergivliga väggar bidrog till en minskad lasteffekt på explosionsutsatt byggnad.

En byggnad med pelarstomme har en fördel i att ingående väggar till stor del inte är bärande. Detta kan i sin tur medföra att ingående väggelement är svagare och därmed mer eftergivliga än vad fallet är för en byggnad med bärande väggar. En sådan respons har gynnsam effekt på den last som verkar på byggnaden. En tidig kollaps av fasaden medför att den totala lasten på byggnaden minskar eftersom denna beror på lastens impulstäthet och den lastupptagande area som byggnaden utgör. En byggnad med pelarstomme och eftergivliga väggar kan därmed få en märkbart lägre lastverkan på det bärande systemet jämfört med motsvarande byggnad vars stomme exempelvis utgörs av en bärande fasad av betongväggar.

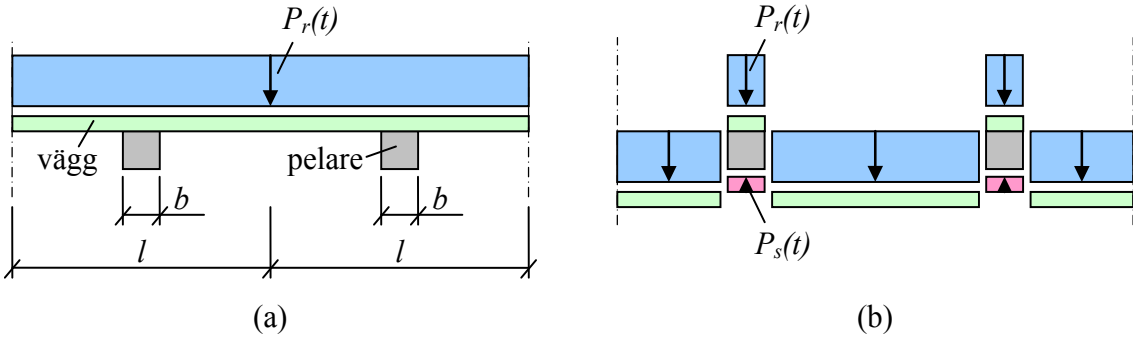
Detta illustreras schematiskt i Figur 3.24. Här visas två principfall – Figur 3.24a med oeftergivliga väggar, vilket ger en stor lastverkan och Figur 3.24b med eftergivliga väggar som ger en liten lastverkan. Av detta framgår att en stötvåg som enbart verkar på pelarstommen, och inte på hela väggen, kommer ha en kraftigt reducerad lastupptagande area. Vidare kommer lasten på en enskild pelare minskas ytterligare av explosionslasten i sig eftersom pelarens baksida också utsätts för ett tryck som delvis motverkar effekten av det på framsidan verkande trycket. Den last som verkar på varje pelare i Figur 3.24a uppgår till

$$q_a(t) = P_r(t) \cdot l \tag{3.28}$$

medan motsvarande last i Figur 3.24b uppgår till

$$q_b(t) = (P_r(t) - P_s(t)) \cdot b \tag{3.29}$$

där $P_r(t)$ och $P_s(t)$ är reflekterat respektive oreflekterat tryck från explosionslasten.



Figur 3.24 Schematisk bild av last på pelarstomme med (a) oeftergivliga/bärande väggar och (b) eftergivliga/ej bärande väggar.

En förutsättning för ovanstående resonemang är att den verkande lasten har en sådan lång varaktighet att de lastupptagande fasaderna hinner kollapsa innan all last hunnit föras över till byggnaden. Att så är fallet är dock ett rimligt antagande för den typ av explosioner som kan tänkas uppstå i bebyggelsen.

3.3.4.3 Risk med stora glaspartier

Det är inte nödvändigtvis tryckvågen i sig som är farlig för människan – av sammanställning i Johansson och Laine (2012a) framgår att det tryck som en person kan utsättas för, utan att allvarligt skadas, kan vara avsevärda. Istället finns det andra saker i bebyggelsen som utgör ett större hot mot människan och glassplitter från krossade fönster är ett exempel på detta.

Det är idag inte ovanligt med byggnader som har stora glasade fasadytor. Det ska dock poängteras att risken för personskador i närheten av sådana byggnader är högre än för byggnader med fasader bestående av andra byggnadsmaterial. Det är inte rimligt att generellt undvika stora glasade partier hos samtliga byggnader i bebyggelsen men den potentiella risken med sådana fasader bör beaktas i stadsplaneringen så att dessa eventuellt undviks på platser där risken för explosionslaster bedöms vara hög. Exempel på sådana platser kan vara i närheten av polishus och banker, vilka båda har en större potential att utsättas för någon form av hot där en explosion kan äga rum.

3.4 Åtgärder som ger ökad motståndsförmåga mot impulsbelastning

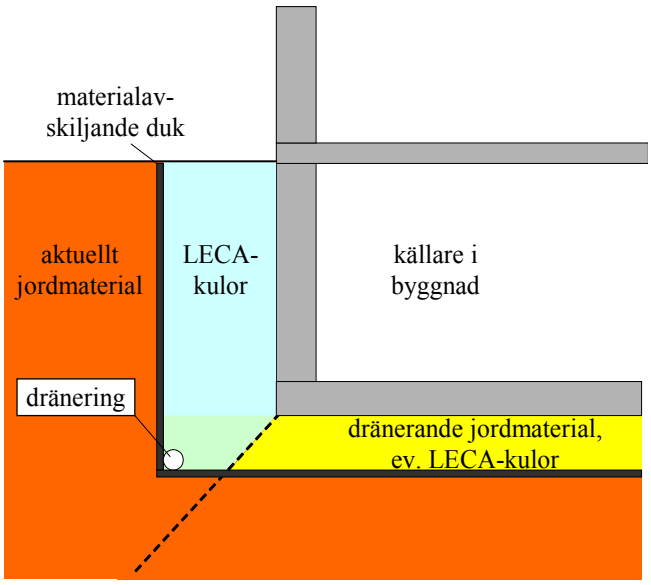
3.4.1 Förbruka energi på ett alternativt sätt

3.4.1.1 Koncept

I avsnitt 3.3.2.1 presenteras övergripande ett koncept för energiupptagningsförmåga som används i fordon. Motsvarande koncept för att ta upp det yttre arbete som en explosionslast ger upphov till är önskvärt även hos en byggnad. I följande avsnitt ges övergripande några konceptuella exempel på möjliga förstärkningsåtgärder som medför en sådan alternativ energiförbrukning.

3.4.1.2 LECA-kulor i mark

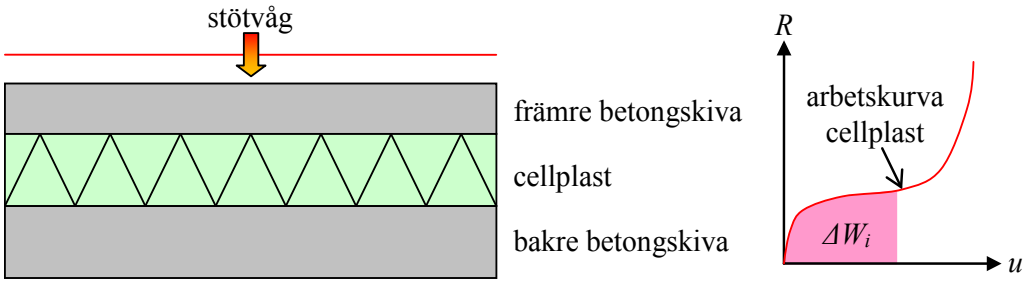
En möjlig förstärkning av en byggnad med hänsyn till last från markstötvåg är användandet av ett energiförbrukande skikt i marken. Ett sådant skikt kan utgöras av ett poröst material såsom lätt expanderade lerkulor, såkallade LECA-kulor, se Figur 3.25. Laine (2002) har via finita volym-analyser visat en påtaglig positiv effekt vid denna typ av förstärkning. Fördelen med ett sådant skikt är tvåfaldigt – dels förbrukar LECA:n i sig energi när den pressas samman av den last som markstötvågen utgör och dels fås en tryckavlastning i marken när stötvågen ska transmitteras från det tyngre jordmaterialet till den lättare LECA:n.



Figur 3.25 Schematisk bild av hur en förstärkning med ett skikt av LECA-kulor kan göras på befintlig byggnad. Baserad på Laine (2002).

3.4.1.3 Sandwichelement – skikt av cellplast

I en betongkonstruktion kan ett skikt motsvarande det som används i marken i avsnitt 3.4.1.2 ge en liknande gynnsam, energiförbrukande, effekt. Ett skikt av cellplast mellan två betongskivor, se Figur 3.26, medför en ökad energiförbrukning när den av explosionslasten accelererade främre skivan pressar samman cellplasten mot den bakomliggande betongskivan.

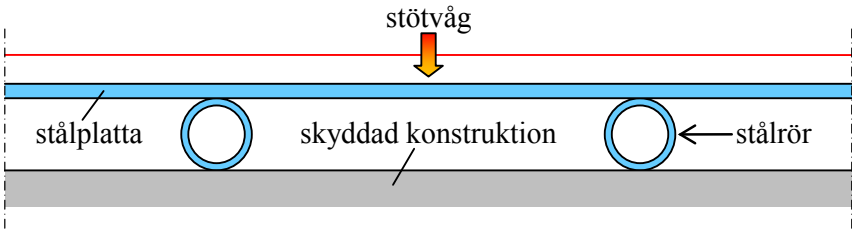


Figur 3.26 Förstärkning med användande av cellplastskikt mellan främre och bakre betongskiva. När cellplasten pressas samman bidrar den med en energiförbrukning ΔW_i.

Hur effektiv denna typ av förstärkning blir beror på cellplastens egenskaper i kombination med ingående styvheter hos den främre och bakre betongskivan. En alltför styv cellplast kan medföra att den bakre betongskivan sätts i rörelse redan vid en liten energiförbrukning av cellplasten medan en alltför vek cellplast kan resultera i att denna trycks ihop så mycket att den främre betongskivan i princip slår igenom och träffar den bakre betongskivan på ett ogynnsamt sätt. Den resulterande impulsen som rör sig genom konstruktionen kommer inte att ändras men kan med en sådan här åtgärd jämnas ut så att extrema lasttoppar undviks.

3.4.1.4 Skyddande skikt – Stålrör + plåt som energiupptagning

I avsikt att smeta ut höga laster kan en dämpande konstruktionsdel användas och det cellplastskikt som presenteras i avsnitt 3.4.1.3 har ha en sådan effekt. En annan lösning, som bland annat används i Israel, se Kivity och Ben-Dor (2006), är att använda cirkulära stålrör placerade under en stålplåt, se Figur 3.27. När stålplåten belastas av en tillräckligt stor impulslast plasticerar stålrören och pressas samman till en oval form. Detta förbrukar dels energi och tar dessutom en del tid vilket gör att den maximala lastnivån mot bakomliggande byggnad reduceras jämfört med den inkommande explosionslasten. Liksom för cellplasten i föregående avsnitt så utgör rörens kapacitet en övre gräns för vilken last som kan överföras från stålplåten till den bakomliggande (skyddade) konstruktionen.



Figur 3.27 Schematisk förstärkning med användande av stålrör och stålplatta.

3.4.2 Förstärkning

3.4.2.1 Koncept

Förstärkning av en konstruktion kan dels göras via en ökad massa och dels som en ökning av dess lastupptagande förmåga. I enlighet med avsnitt 3.3.2.2 medför en ökning av massan en proportionell minskning av den verkande lastens yttre arbete medan en ökning av konstruktionens lastupptagande förmåga kan bestå av en ökad styvhet, hållfasthet och/eller deformationsförmåga.

För en impulsbelastad konstruktion kan en ökande komplexitet tillkomma i förstärkningen jämfört med vad som är fallet vid enbart statisk belastning. För en statiskt belastad konstruktion är det ofta möjligt att påvisa att det för kritiska lastfall enbart finns behov av förstärkning på ena eller andra sidan – exempelvis över- eller undersida av ett plattbjälklag – av utsatt konstruktionsdel. Vid en impulsbelastning kommer den utsatta konstruktionsdelen dock svänga fram och tillbaka, vilket medför att båda sidor utsätts för likartade påfrestningar och därför har behov av att förstärkas lika mycket på båda sidor för att förstärkningen ska få avsedd effekt. För att förenkla i nedan givna exempel illustreras dock genomgående enbart förstärkning på en sida av befintlig konstruktion.

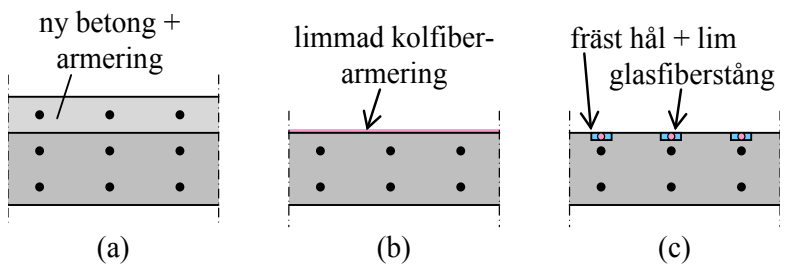
3.4.2.2 Ökad massa

En ökad massa hos utsatt konstruktion är ett effektivt sätt att öka dess motståndskraft mot en befarad impulsbelastning. Praktiskt kan det dock av flera skäl vara problematiskt att utföra en sådan åtgärd, exempelvis på grund av att den befintliga konstruktionen inte kan bära den extra vikt en sådan massökning innebär eller att det av utrymmesmässiga och/eller estetiska skäl kan vara svårt att tillföra den extra massan till den befintliga konstruktionen.

Det ska dock konstateras att ett masstillskott hos en befintlig konstruktion får en gynnsam inverkan för dess förmåga att motstå en impulsbelastning. Detta innebär exempelvis att det för en befintlig betongvägg medför en förbättrad skyddsförmåga att gjuta en extra vägg utanför den befintliga, även om tillskottet i bärförmågan via förstärkningen är försumbar, se vidare avsnitt 3.4.2.3.

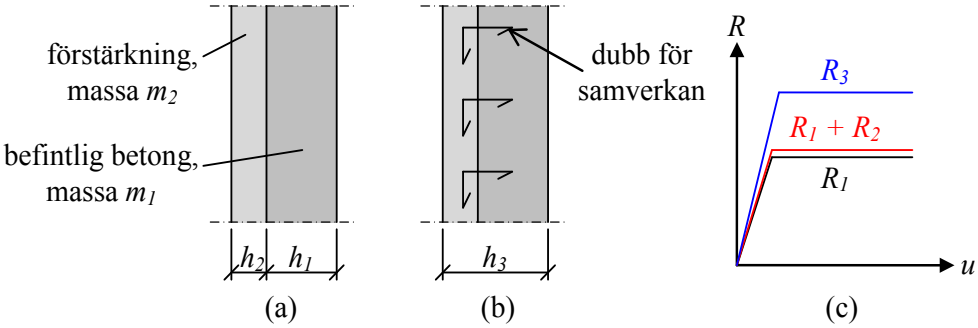
3.4.2.3 Ökad hållfasthet

Ökad hållfasthet kan för en betongkonstruktion antingen åstadkommas genom tillskott av en ökad armeringsmängd och/eller en ökad konstruktionshöjd. Om konventionell stålarmering används innebär ett armeringstillskott i praktiken även att konstruktionshöjden ökar. Det är dock möjligt att använda alternativa metoder, exempelvis med pålimning av kolfiber eller via fräsning av spår i betongen där glasfiberarmering placeras och limmas, se Figur 3.28.



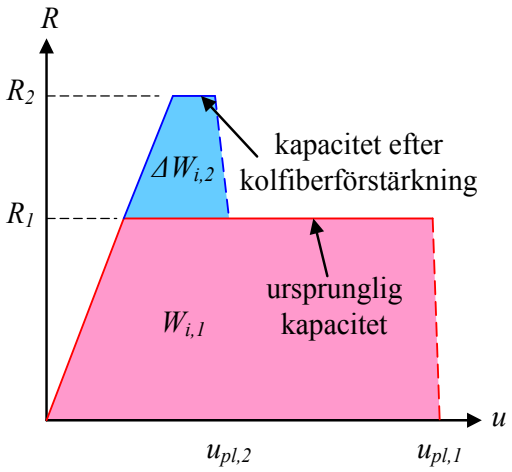
Figur 3.28 Olika typer av förstärkning av en befintlig betongkonstruktion: (a) ny betongplatta med extra armering, (b) limmad kolfiber på befintlig betong, (c) spårfräsning och limning av glasfiberarmering i befintlig betong.

Vid en förstärkning enligt Figur 3.28a tillförs, förutom en kapacitetsökning, även en ökad massa till den befintliga konstruktionen, vilket för en impulsbelastad konstruktion har en gynnsam effekt. Som framgår av resonemang i avsnitt 3.4.2.2 krävs det för denna typ av förstärkning inga åtgärder för att säkerställa samverkan mellan ny och befintlig betong, för att få en positiv effekt. Att säkerställa full samverkan mellan ny och befintlig betong medför dock ytterligare positiva effekter eftersom detta i praktiken medför en ökad konstruktionshöjd. I Figur 3.29 ges en schematisk bild av en förstärkt betongvägg där ingen respektive full samverkan råder mellan befintlig och ny betongvägg. I båda fallen fås ett gynnsamt masstillskott m_2 till väggens totala massa medan det i fall (b) även kommer kunna bli en påtaglig ökning av väggens bärförmåga via den ökade tvärsnittshöjden från h_1 till h_3. I fall (a) kommer visserligen också en viss hållfasthetsökning fås men effekten av denna blir betydligt mindre eftersom den befintliga väggen, såsom illustreras i Figur 3.29c, inte kommer kunna dra nytta av denna.



Figur 3.29 Schematisk bild av förstärkt betongvägg med åtgärder för att åstadkomma (a) ingen samverkan, och (b) full samverkan. I (c) visas principiella resulterande arbetskurvor för oförstärkt (R_1) respektive förstärkt vägg ($R_1 + R_2$ samt R_3).

Förstärkning av en befintlig konstruktion med pålimmad kolfiber eller limning av glasfiberstänger i frästa hål, såsom illustreras i Figur 3.28b och Figur 3.28c är idag ett inte helt ovanligt sätt att öka en befintlig konstruktions statiska bärförmåga. Motsvarande gynnsamma effekt för en impulsbelastad konstruktion är dock inte nödvändigtvis riktigt lika påtaglig eftersom kol- och glasfiber är spröda material och därmed också får problem att uppvisa ett bestående segt beteende. Det är mycket möjligt att den ursprungliga konstruktion kan ha en bättre deformationsförmåga än den förstärkta konstruktionen, se Figur 3.30, varför den ökade energiupptagningsförmågan inte nödvändigtvis blir så stor som förväntat. Om den ursprungliga konstruktionen uppvisar en rimlig plastisk respons, såsom exemplifieras i Figur 3.30, fås dock fortfarande en viss ökning av den totala energi-upptagningsförmågan från $W_{i,1}$ till $W_{i,1} + \Delta W_{i,2}$.



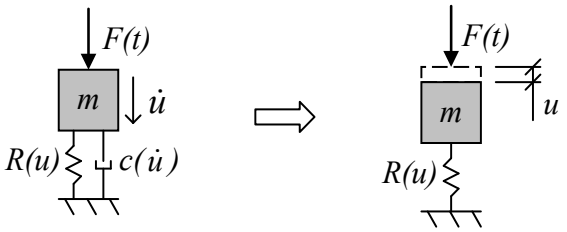
Figur 3.30 *Schematisk bild av respons hos konstruktion förstärkt med kolfiber. Med förstärkning ökar kapaciteten från R_1 till R_2 men samtidigt finns risk att den tillåtna deformationen efter förstärkning minskar från $u_{pl,1}$ till $u_{pl,2}$. En viss ökning av konstruktionens totala energiupptagningsförmåga fås dock fortfarande via $\Delta W_{i,2}$.*

4 Beräkningsmodell för dynamiskt belastad balk

4.1 Orientering

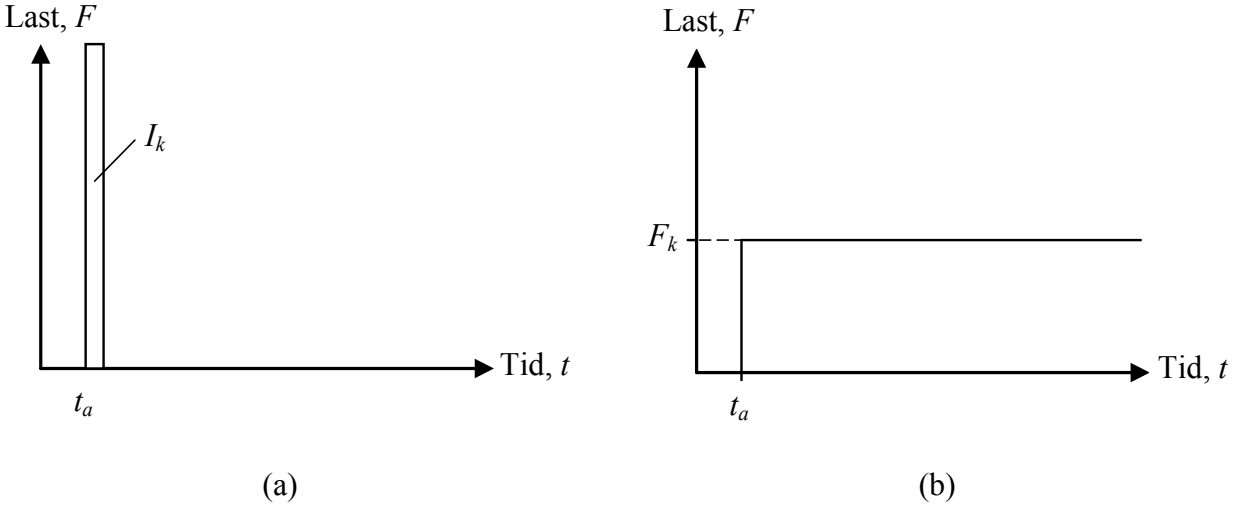
I detta kapitel behandlas hur responsen hos en dynamiskt belastad balk kan bestämmas. Presenterat resonemang utgår från belastning av ett enfrihetsgradsystem. På engelska benämns detta som single-degree-of-freedom, vilket förkortas till SDOF och som också är ett vanligt förekommande sätt att lite förenklat benämna ett sådant system.

Ett dynamiskt enfrihetsgradsystem illustreras i Figur 4.1 och består av en massa m som utsätts för en yttre tidsberoende last $F(t)$. Som mothåll till denna last finns ett inre statiskt motstånd $R(u)$ och en viskös dämpare c vilka genererar en statisk kraft $R_{sta}(u)$ respektive en viskös kraft $R_{dyn}(\dot{u})$. I här utförda beräkningar försummas dock dämpningens inverkan, något som bedöms vara rimligt med tanke på de kortvariga belastningsförlopp som råder samt att det här enbart är den maximala förskjutningen som är av intresse. Därmed kvarstår också enbart den statiska kraften $R(u) = R_{sta}(u)$ som inre motstånd.



Figur 4.1 Definition av ett enfrihetsgradsystem, SDOF.

I Figur 4.2 illustreras två dynamiska ytterlighetsfall – ideal impulslast samt såkallad trycklast – där I_k anger den karakteristiska impulsen för en ideal impulslast, dvs. en tidsberoende last med oändligt högt tryck och infinitesimal varaktighet, och F_k anger den karakteristiska trycklasten för en oändligt lång stötvåg som verkar mot studerat enfrihetsgradsystem.



Figur 4.2 Illustration av dynamiska ytterlighetsfall som börjar verka vid tiden t_a: (a) karakteristisk impuls I_k och (b) karakteristisk trycklast F_k.

Ett godtyckligt last-tidssamband *F(t)* kommer befinna sig någonstans mellan dessa båda fall. Förenklat kan sägas att en last med lång varaktighet går mot ett fall med karakteristisk trycklast och en last med kort varaktighet går mot ett fall motsvarande det för karakteristisk impuls. Det ska dock poängteras att vad som menas med kort respektive lång varaktighet varierar och beror på den belastade strukturens egenskaper.

I denna rapport behandlas främst dynamiska laster som liknar en impulslast, dvs. last enligt Figur 4.2a. Dynamisk last enligt Figur 4.2b berörs dock också kort eftersom den används vid användning av såkallade skadekurvor som behandlas i avsnitt 4.4.

4.2 SDOF belastad med impulslast I_k

4.2.1 Yttre arbete

Aktuell last illustreras i Figur 4.2a. I avsnitt 3.3.2 ges en övergripande orientering om konceptet energiupptagningsförmåga och det visas i ekvation (3.26) att den initierade rörelseenergin (= yttre arbete W_y) E_k som genereras av en impulslast I_k som verkar på en kropp med massan m kan uttryckas som

$$W_y = E_k = \frac{I_k^{\,2}}{2m} \tag{4.1}$$

4.2.2 Inre arbete

4.2.2.1 Energibalans

För att stoppa den initierade rörelsen hos utsatt kropp krävs ett lika stort mothållande arbete, här benämnd som inre arbete W_i. Dvs. en energibalans

$$W_y = W_i \tag{4.2}$$

utgör den konceptuella grunden hos en beräkningsmodell för en impulsbelastad konstruktion.

4.2.2.2 Elastisk respons

Med elastisk respons syftas i den här rapporten genomgående på ett linjärelastiskt beteende. För ett elastiskt system, Figur 4.3, kan den inre mothållande kraften *R(u)*, Figur 4.3b, tecknas som

$$R(u) = ku \tag{4.3}$$

där k är en konstant styvhet och u är förskjutning. Det inre arbetet W_i kan ur detta beräknas som

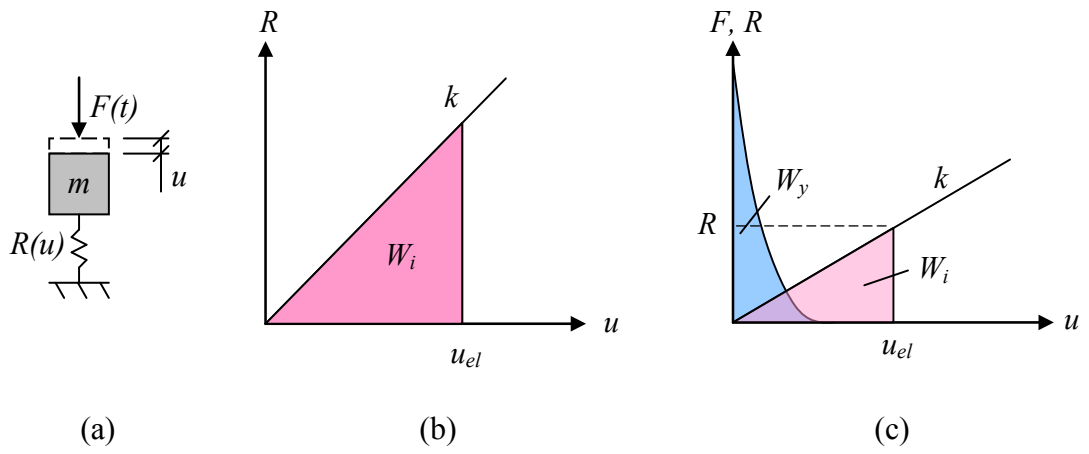
$$W_i = \frac{R(u_{el}) \cdot u_{el}}{2} = \frac{k u_{el}^{\ 2}}{2} \tag{4.4}$$

där u_{el} är elastisk förskjutning som behövs för att systemet ska ta upp det yttre arbetet W_y enligt Figur 4.3c. Kombinering av ekvation (4.1) och (4.4) ger att erforderlig elastisk deformation kan beräknas som

$$u_{el} = \frac{I_k}{m\omega} \tag{4.5}$$

där ω är enfrihetsgradsystemets egenvinkelfrekvensen definierad som

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{4.6}$$



Figur 4.3 System med linjärelastisk respons: (a) Enfrihetsgradsystem, (b) kraft-förskjutnings-samband, (c) energijämvikt mellan yttre arbete W_y och inre arbete W_i.

4.2.2.3 Plastisk respons

För ett plastiskt system, Figur 4.4, kan den inre mothållande kraften *R(u)*, Figur 4.4b, tecknas som

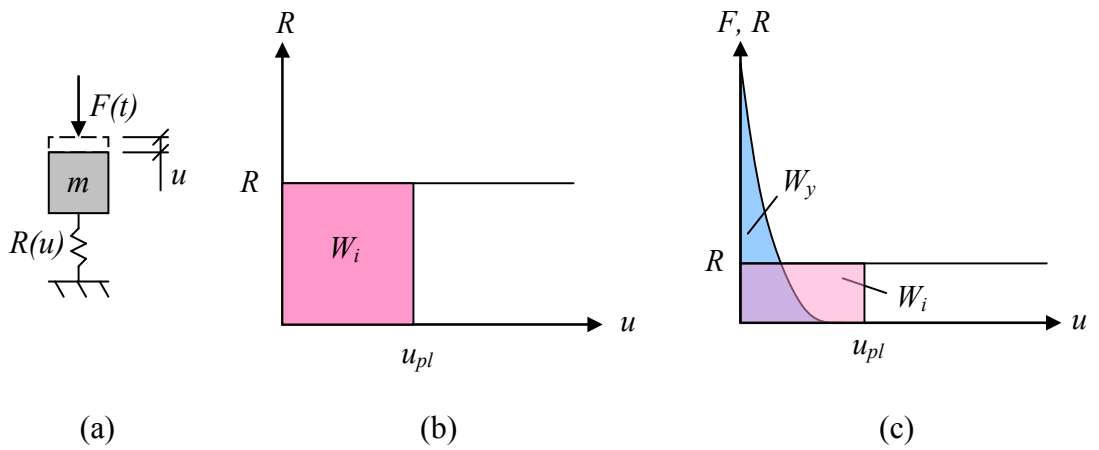
$$R(u) = R \tag{4.7}$$

där R är en konstant kapacitet. Det inre arbetet W_i kan ur detta beräknas som

$$W_i = R(u_{pl}) \cdot u_{pl} = R u_{pl} \tag{4.8}$$

där u_{pl} är plastisk förskjutning som behövs för att systemet ska ta upp ett yttre arbete W_y enligt Figur 4.4c. Kombinering av ekvation (4.1) och (4.8) ger att erforderlig plastisk deformation kan beräknas som

$$u_{pl} = \frac{I_k^{\,2}}{2mR} \tag{4.9}$$



Figur 4.4 System med plastisk respons: (a) Enfrihetsgradsystem, (b) kraft-förskjutnings-samband, (c) energijämvikt mellan yttre arbete W_y och inre arbete W_i.

4.2.2.4 Elastisk och plastisk respons

För ett elastoplastiskt system, Figur 4.5, kan den inre mothållande kraften *R(u)*, Figur 4.5b, tecknas som

$$R(u) = \begin{cases} ku, & u \le u_{el,1} \\ R, & u > u_{el,1} \end{cases} \tag{4.10}$$

där $u_{el,1}$ anger gränsen för elastisk respons, vilket beräknas som

$$u_{el,1} = \frac{R}{k} \tag{4.11}$$

Det inre arbetet W_i kan ur detta beräknas som

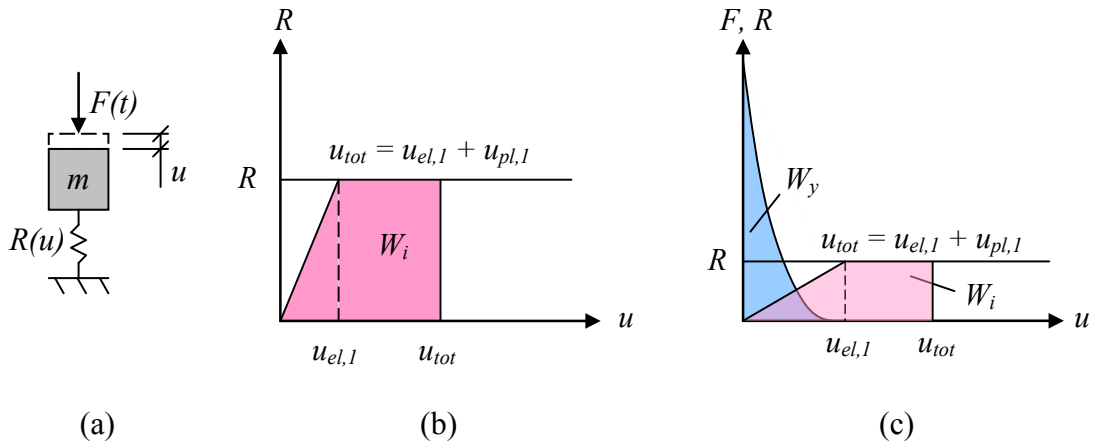
$$W_i = \frac{R}{2}\left(u_{el,1} + 2u_{pl,1}\right) \tag{4.12}$$

och kombinering med ekvation (4.1) och (4.2) ger att erforderlig plastisk deformation kan beräknas som

$$u_{pl,1} = \frac{I_k^{\,2}}{2mR} - \frac{u_{el,1}}{2} = u_{pl} - \frac{u_{el,1}}{2} \tag{4.13}$$

där u_{pl} är plastisk förskjutning för ett system med rent plastisk respons i enlighet med avsnitt 4.2.2.3. Den totala deformationen som därvid erhålls blir

$$u_{tot} = u_{el,1} + u_{pl,1} = u_{pl} + \frac{u_{el,1}}{2} \tag{4.14}$$



Figur 4.5 System med plastisk respons: (a) Enfrihetsgradsystem, (b) kraft-förskjutnings-samband, (c) energijämvikt mellan yttre arbete W_y och inre arbete W_i.

4.2.3 Ekvivalent statisk last

4.2.3.1 Definition

Eftersom det för de flesta ingenjörer är mer bekant att handskas med statiska än dynamiska laster så finns intresse att även kunna översätta den dynamiska impulslasten till en ekvivalent statisk last. Detta görs genom att bestämma den statiska last Q som på det statiska systemet genererar samma yttre arbete som betraktad impulslast I_k.

4.2.3.2 Elastisk respons

För ett elastiskt system fås den ekvivalenta statiska lasten Q genom att nyttja sambandet

$$W_y = \frac{Qu_{el}}{2} \tag{4.15}$$

vilket kombinerat med ekvation (4.4) ger att

$$Q = ku_{el} \tag{4.16}$$

För en konstruktion med elastisk respons innebär detta således att den statiska last Q motsvarar den last som genererar samma förskjutning som impulsen I_k. Detta kombinerat med ekvation (4.5) och (4.6) medför slutligen att

$$Q = I_k \sqrt{\frac{k}{m}} = I_k \omega \tag{4.17}$$

4.2.3.3 Plastisk respons

För ett plastiskt system bestäms den ekvivalenta statiska lasten Q genom att likställa det yttre arbetet i ekvation (4.1) med

$$W_y = Qu_{pl} \tag{4.18}$$

vilket ger att

$$Q = \frac{I_k^{\,2}}{2m \cdot u_{pl}} \tag{4.19}$$

som via ekvation (4.9) ger att

$$Q = R \tag{4.20}$$

Annorlunda uttryckt innebär detta att för ett fullständigt plastiskt system bestäms den erforderliga mothållande kraften R utgående från den tillåtna plastiska förskjutningen u_{pl}.

4.2.3.4 Elastoplastisk respons

På samma sätt som för plastisk respons i avsnitt 4.2.3.3 fås den statiska ekvivalenta lasten för ett elastoplastiskt system som

$$Q = R \tag{4.21}$$

men med den skillnaden att erforderligt värde på R här bestäms utgående från den elastiska styvheten k, via den resulterande elastiska förskjutningen $u_{el,1}$ i ekvation (4.11), och den tillåtna plastiska förskjutningen $u_{pl,1}$, se ekvation (4.14).

4.3 SDOF belastad med trycklast F_k

4.3.1 Yttre arbete

Aktuell last illustreras i Figur 4.2b. Det yttre arbetet W_y kan tecknas som produkten mellan trycklasten F_k och förskjutningen u hos enfrihetsgradsystemet.

$$W_y = F_k \cdot u \tag{4.22}$$

4.3.2 Elastisk respons

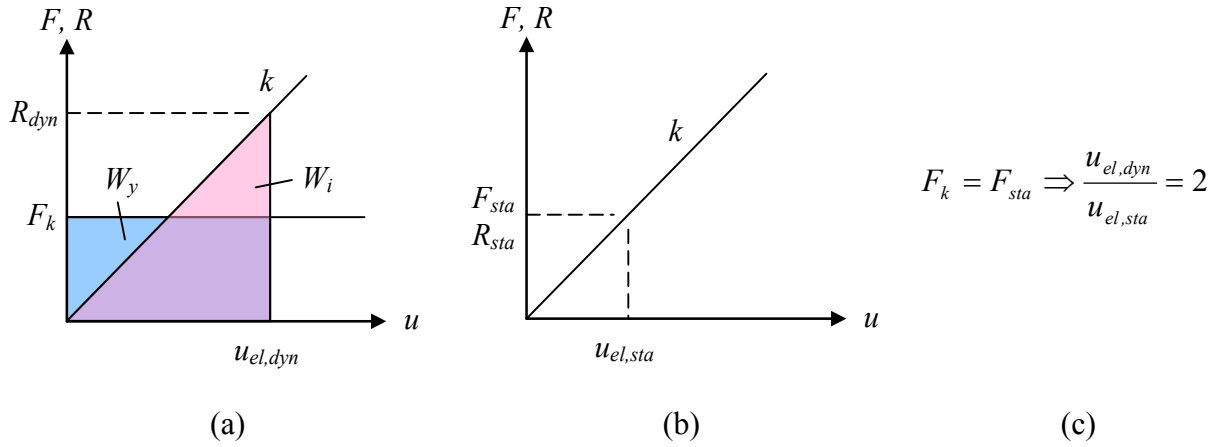
Responsen hos ett system med elastisk respons behandlas i avsnitt 4.2.2 och utgående från energijämvikt, $W_y = W_i$, samt ekvation (4.4) kan en resulterande elastisk förskjutning u_{el} tecknas som

$$u_{el} = \frac{2F_k}{k} \tag{4.23}$$

vilket med utnyttjande av ekvation (4.6) kan uttryckas som

$$u_{el} = \frac{2F_k}{m\omega^2} \tag{4.24}$$

Det ska noteras att resulterande elastisk förskjutning i ekvation (4.23) blir dubbelt så stor som den förskjutning som fås av en motsvarande statisk last av samma magnitud, jämför Figur 4.6.



Figur 4.6 Jämförelse av resulterande elastisk deformation hos ett enfrihetsgradsystem som utsätts för (a) en karakteristisk trycklast F_k och (b) en statisk last F_{sta}, (c) samband mellan dynamisk och statisk respons.

4.3.3 Plastisk respons

För ett system med plastisk respons gäller att

$$u_{pl} = \begin{cases} 0, & F_k < R \\ \infty, & F_k \geq R \end{cases} \tag{4.25}$$

Dvs. om trycklasten F_k är lägre än den mothållande kraften R så initieras ingen deformation men om F_k är större än R så kommer deformationen gå mot oändligheten. Om tillåten plastisk deformation u_{pl} inte begränsas fås dock en energijämvikt om

$$F_k = R \tag{4.26}$$

4.3.4 Elastoplastisk respons

För ett system med elastoplastisk respons gäller att

$$u_{tot} = \begin{cases} u_{el}, & F_k \leq \dfrac{R}{2} \\ u_{el,1} + u_{pl,1}, & \dfrac{R}{2} < F_k < R \\ \infty, & F_k \geq R \end{cases} \tag{4.27}$$

Dvs. om trycklasten F_k är lägre än halva den mothållande kraften R så begränsas deformationen till en elastisk deformation u_{el} som beräknas enligt ekvation (4.23). Om F_k är större än $R/2$ men fortfarande mindre än R fås en total deformation

$$u_{tot} = u_{el,1} + u_{pl,1} \tag{4.28}$$

där

$$u_{el,1} = \frac{R}{k} \tag{4.29}$$

och den plastiska deformationen bestäms av energijämvikt enligt Figur 4.7, där det yttre arbetet W_y kan tecknas som

$$W_y = F_k \cdot u_{tot} = F_k \cdot \left(u_{el,1} + u_{pl,1}\right) \tag{4.30}$$

och det inre arbetet W_i som

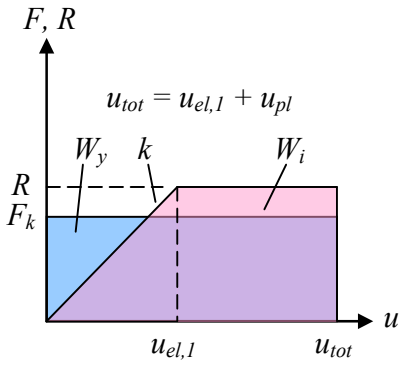
$$W_i = \frac{R}{2} \cdot \left(u_{el,1} + 2u_{pl,1}\right) \tag{4.31}$$

Sammantaget ger detta

$$u_{pl,1} = \frac{2F_k - R}{2\left(R - F_k\right)} \cdot u_{el,1} \tag{4.32}$$

varvid den totala förskjutningen i ekvation (4.28) kan skrivas om som

$$u_{tot} = \frac{R}{2\left(R - F_k\right)} \cdot u_{el,1} \tag{4.33}$$



Figur 4.7 Energijämvikt hos elastoplastiskt system utsatt för en karakteristisk trycklast F_k.

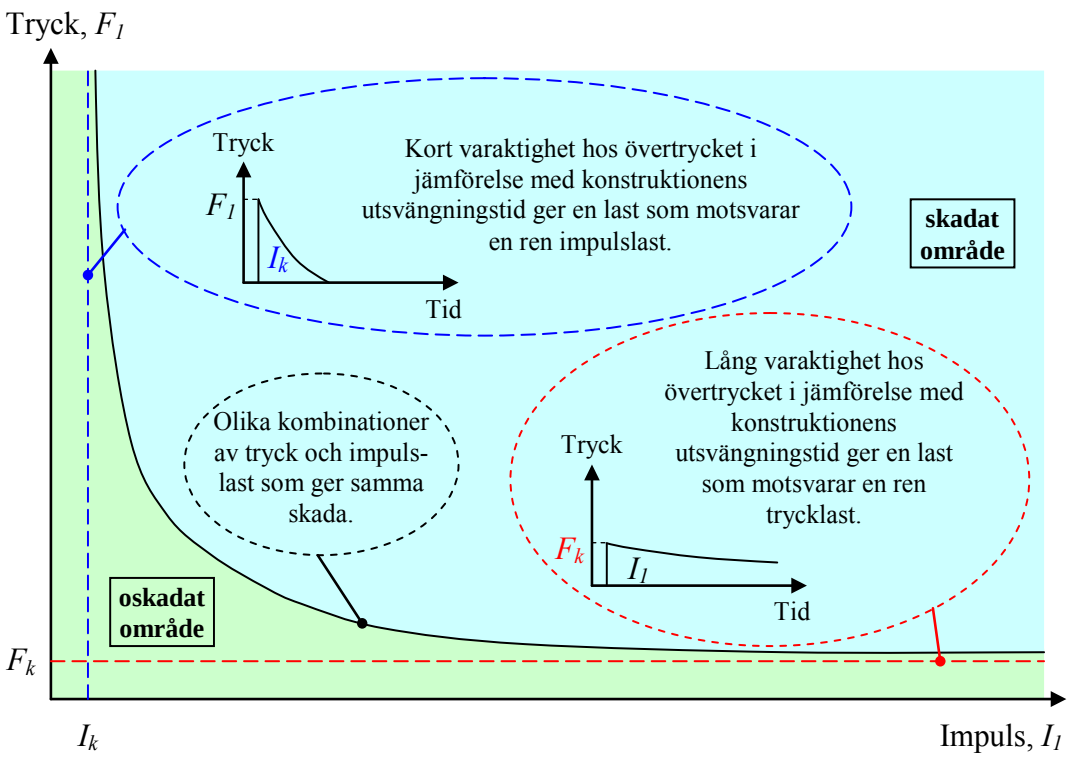
4.4 Skadekurvor

4.4.1 Orientering

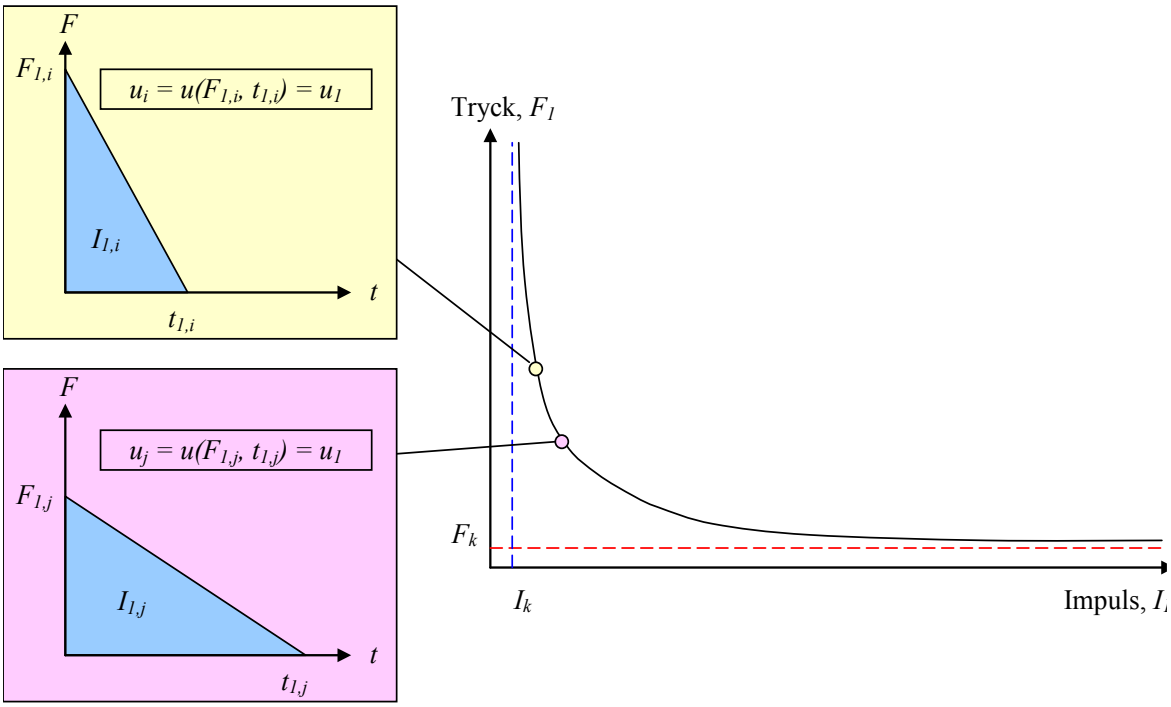
Uttrycken i avsnitt 4.2 och 4.3 förutsätter att den last som verkar på studerat system motsvarar en karakteristisk impulslast I_k respektive en karakteristisk trycklast F_k. Om så inte är fallet fås en mindre förskjutning än vad som anges i dessa uttryck. Dvs. för ett godtyckligt last-tidssamband är det på säker sida att använda sig av uttrycken i avsnitt 4.2 och 4.3 för att bestämma responsen hos ett enfrihetsgradsystem.

Det kan dock vara önskvärt att inte godta en sådan säkerhetsmarginal utan söka beakta systemets respons så noggrant som möjligt. Så är också möjligt genom att lösa den dynamiska jämvikten för det aktuella fallet. Detta kan göras med en analytisk eller numerisk lösning, den senare exempelvis via användandet av den explicita centrala differensmetoden som beskrivs i Bilaga B.

Ett annat ofta använt verktyg är såkallade skadekurvor, eller last-impulskurvor som de också kallas, se Figur 4.8. Skadekurvor för ett enfrihetsgradsystem används för att på ett enkelt och översiktligt sätt beskriva systemets respons för dynamiska laster som ligger mellan de två extremfallen karakteristisk impulslast och karakteristisk trycklast. En sådan kurva beskriver vilka kombinationer av maximallast F_1 och impuls I_1 som för avsett system genererar samma maximala förskjutning, se schematisk illustration i Figur 4.9. Med utgångspunkt från tillåten förskjutning blir det därmed möjligt att utforma dessa skadekurvor så att det snabbt går att avläsa om en given dynamisk last uppnår en viss förskjutning (skada) eller inte och kan därmed utgöra ett viktigt hjälpmedel för att enkelt beskriva en konstruktions bärförmåga.



Figur 4.8 Schematisk bild av skadekurva där den karakteristiska trycklasten F_k och den karakteristiska impulsen I_k utgör kurvans asymptoter. Baserat på Forsén (1998).



Figur 4.9 Schematisk illustration av två last-tidssamband som genererar samma maximala förskjutning.

4.4.2 Framtagning av skadekurvor

Skadekurvans utseende beror på lastens form samt på responsen hos studerat system. I detta arbete tas skadekurvor fram för last-tidssamband enligt ekvation (4.34), illustrerade i Figur 4.10, samt för elastisk och plastisk respons.

$$F(t) = F_1\left(1 - \frac{t}{t_1}\right)^n \quad , n = 0,\ 1,\ 2 \tag{4.34}$$

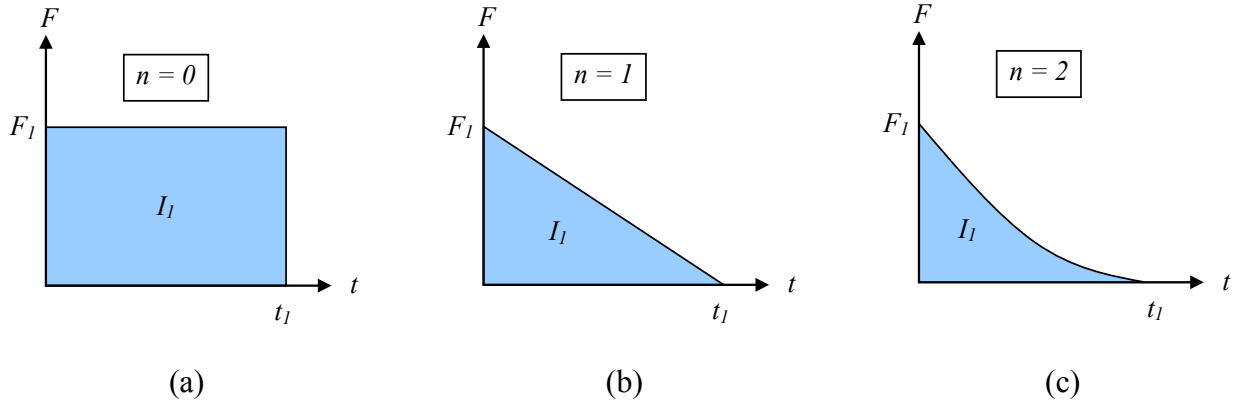
Impulsen kan för en sådan last beräknas som

$$I_1 = \int_{t=0}^{t=t_1} F(t)dt = \frac{F_1 \cdot t_1}{\alpha} \tag{4.35}$$

där

$$\alpha = n + 1 \tag{4.36}$$

är en konstant som beror på last-tidssambandets form.



Figur 4.10 Last-tidssamband som används vid framtagning av skadekurvor: (a) rektangulär last, (b) triangulär last, (c) kvadratiskt avtagande last. Faktorn n anger hur lasten avtar med tiden enligt ekvation (4.34).

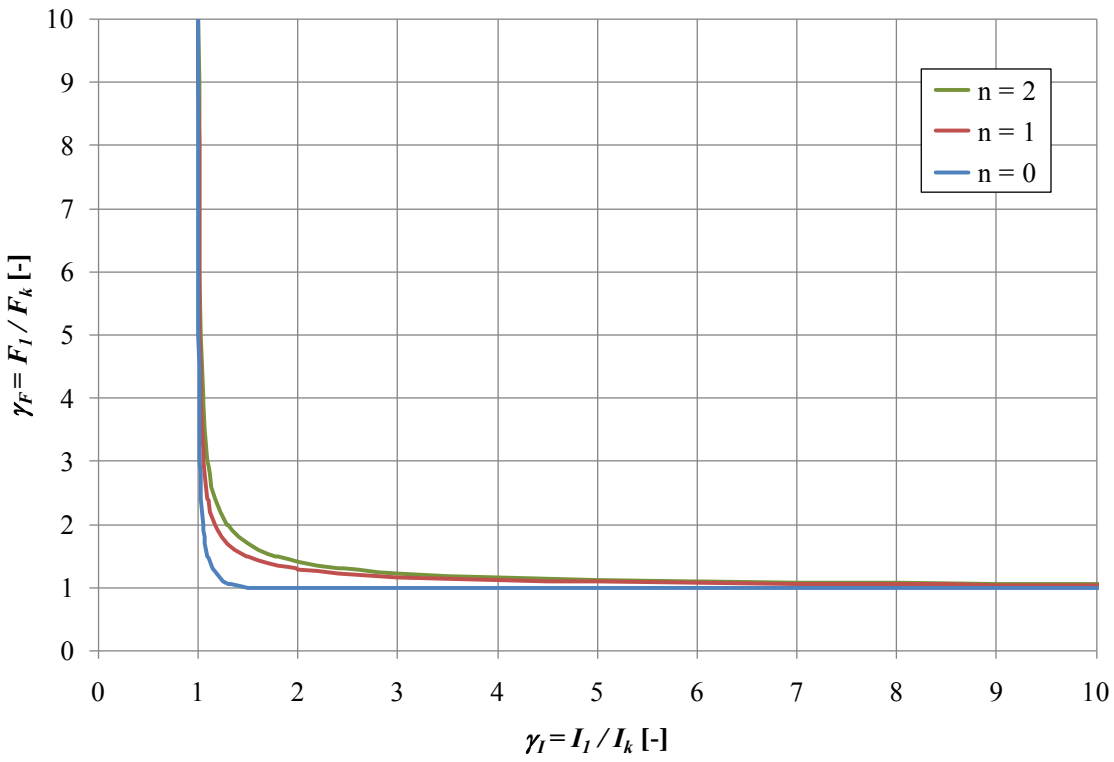
Som stöd för beskrivning av skadekurvor införs begreppen

$$\gamma_F = \frac{F_1}{F_k} \tag{4.37}$$

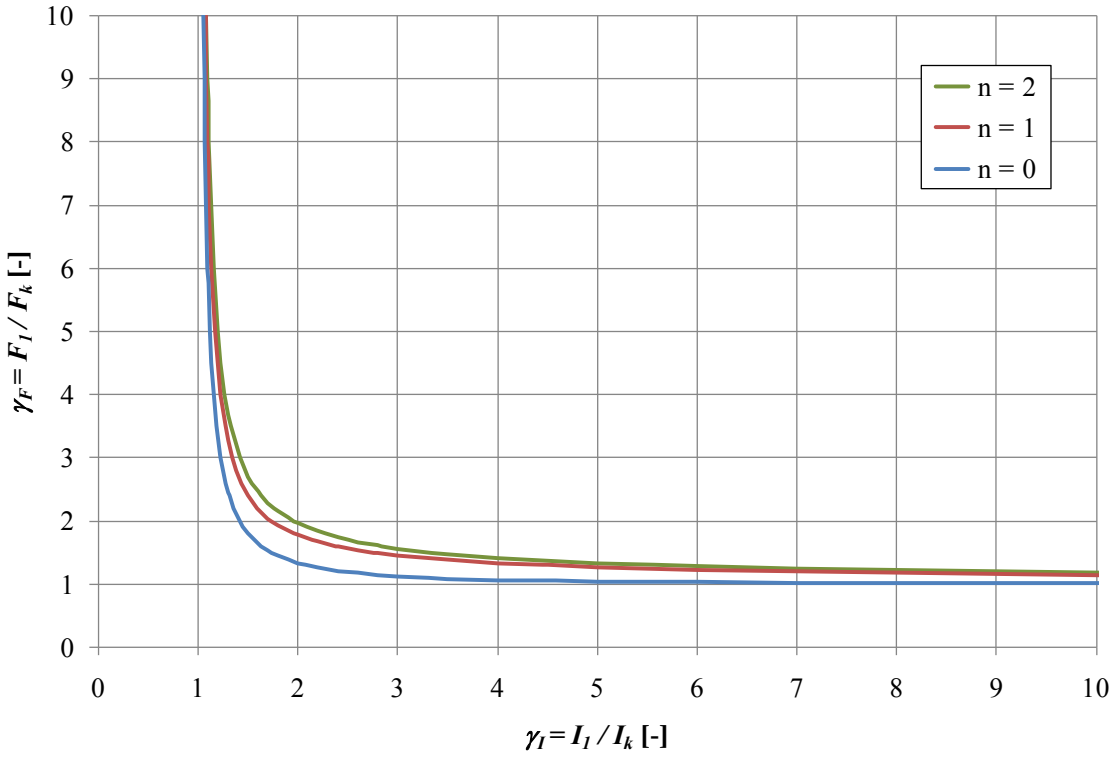
$$\gamma_I = \frac{I_1}{I_k} \tag{4.38}$$

där γ_F och γ_I benämns som trycklastfaktor respektive impulslastfaktor, F_k och I_k är motsvarande karakteristisk trycklast och impulslast enligt Figur 4.2 samt F_1 och I_1 är maximallast respektive resulterande impuls för aktuell dynamisk last.

I ett givet system går det att hitta ett oändligt antal kombinationer av F_1 och I_1 som resulterar i samma förskjutning u. Dessa kombinationer av F_1 och I_1 kan, via ekvation (4.37) och (4.38), göras oberoende av aktuellt värde på förskjutningen och istället uttryckas som kombinationer av γ_F och γ_I. I Bilaga C ges en sammanställning av dessa kombinationer av γ_F och γ_I. för last-tidssamband enligt Figur 4.10 och system med elastisk eller plastisk respons. En grafisk framställning av framtagna skadekurvor för elastisk och plastisk respons visas i Figur 4.11 respektive Figur 4.12.



Figur 4.11 Skadekurva för system med elastisk respons av last enligt Figur 4.10.



Figur 4.12 Skadekurva för system med plastisk respons av last enligt Figur 4.10.

4.5 När blir en dynamisk last en impulslast?

4.5.1 Koncept

I avsnitt 4.2 ges uttryck för hur maximal deformation kan bestämmas vid belastning av en karakteristisk impulslast. Som påtalas i avsnitt 4.4 resulterar dessa uttryck dock i en respons på säker sida och de skadekurvor som redovisas i det senare avsnittet syftar till att ge en mer korrekt bild av den respons som fås vid några utvalda last-tidssamband. Även om dylika skadekurvor är ett användbart hjälpmedel så är det även av intresse att utan dessa kunna ange vilken effekt en godtycklig last har på en konstruktion.

Via samband från skadekurvorna i avsnitt 4.4.2 kan det bestämmas hur ”nära” en godtycklig dynamisk last är en ideal impulsbelastning. I de följande avsnitten visas hur dessa samband används för att få fram ett förhållande mellan det impulsbelastade systemets utsvängningstid, lastens varaktighet och i vilken grad en godtycklig dynamisk last kan betraktas som en impulslast.

4.5.2 Elastisk respons

4.5.2.1 Förhållande utsvängningstid och varaktighet

Framtagna skadekurvor redovisade i Bilaga C kan användas för att bedöma när en dynamisk last kan betraktas som en impulslast. För ett system med elastisk respons gäller enligt ekvation (4.5) att den resulterande förskjutningen u_{el} av en karakteristisk impulslast I_k uppgår till

$$u_{el} = \frac{I_k}{m\omega} \tag{4.39}$$

På samma sätt gäller att förskjutningen orsakad av en karakteristisk trycklast F_k enligt ekvation (4.24) kan beräknas som

$$u_{el} = \frac{2F_k}{m\omega^2} \tag{4.40}$$

Kombineras dessa både uttryck kan ett samband mellan I_k och F_k tecknas som

$$F_k = \frac{I_k\omega}{2} \tag{4.41}$$

där

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{4.42}$$

är vinkelfrekvensen och f samt T är systemets egenfrekvens respektive periodtid. Kombinering av ekvation (4.41) och (4.42) ger att den karakteristiska trycklasten F_k kan uttryckas som

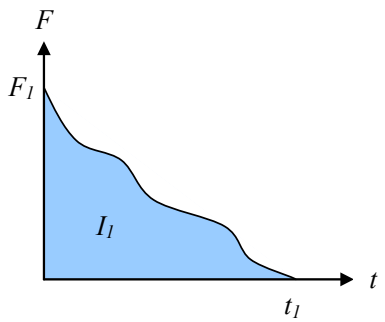
$$F_k = \frac{\pi I_k}{T} \tag{4.43}$$

För ett godtyckligt last-tidssamband, se Figur 4.13, kan maximallast F_1, i förhållande till den karakteristiska lasten F_k, tecknas som

$$F_1 = \gamma_F \cdot F_k \tag{4.44}$$

och den resulterande impulsen I_1 kan på motsvarande sätt uttryckas som funktion av den karakteristiska impulsen I_k som

$$I_1 = \gamma_I \cdot I_k \tag{4.45}$$



Figur 4.13 Godtyckligt last-tidssamband med maximallast F_1 och impuls I_1.

För en sådan belastning kan varaktigheten t_1 tecknas som

$$t_1 = \frac{\alpha I_1}{F_1} \tag{4.46}$$

där

$$\alpha = n + 1 \tag{4.47}$$

är en konstant som beror på last-tidssambandets form, se Figur 4.10. Kombinerat med ekvation (4.44) och (4.45) kan detta skrivas om som

$$t_1 = \alpha \cdot \frac{I_k}{F_k} \cdot \frac{\gamma_I}{\gamma_F} \tag{4.48}$$

Tillsammans med ekvation (4.41) ger detta att

$$t_1 = \frac{2\alpha}{\omega} \cdot \frac{\gamma_I}{\gamma_F} \tag{4.49}$$

vilket med nyttjande av ekvation (4.42) slutligen kan uttryckas som

$$\frac{T}{t_1} = \frac{\pi}{\alpha} \cdot \frac{\gamma_F}{\gamma_I} \tag{4.50}$$

Tillhörande värden på γ_I och γ_F kan bestämmas baserad på de skadekurvor som ges i avsnitt 4.4.2. Utgående från detta blir det möjligt att beräkna vilket förhållande på kvoten T / t_1 som krävs för att faktorn γ_I ska uppfylla ett givet värde.

4.5.2.2 Feluppskattning

Den elastiska förskjutningen av en idealisk impulslast kan bestämmas enligt ekvation (4.39). För en godtycklig dynamisk last kan samma uttryck användas men eftersom den tillhörande impulsen I_1 är mer utdragen i tiden än den karakteristiska impulsen I_k så kommer uttrycket överskatta den resulterande deformationen. Felet δ_{el} av detta kan tecknas som

$$\delta_{el} = \frac{u_{el}(I_1) - u_{el}(I_k)}{u_{el}(I_k)} \tag{4.51}$$

där $u_{el}(I_1)$ är den överskattade förskjutningen som fås av ekvation (4.39) när I_1 används som impuls och $u_{el}(I_k)$ är systemets korrekta förskjutning. För att få fram den korrekta förskjutningen i det belastade systemet via ekvation (4.39) behöver således impulsen I_1 minskas. Kopplingen mellan I_1 och I_k framgår av ekvation (4.45) och för att felet δ_{el} ska bli noll krävs att en motsvarande karakteristisk impuls I_k beräknas som

$$I_k = \frac{I_1}{\gamma_I} \tag{4.52}$$

Dvs. om impulsen I_1 och impulsfaktorn γ_I är kända kan den aktuella impulsen skalas ner med faktorn γ_I varvid lasten kan behandlas som en karakteristisk impuls som ger korrekt förskjutning. Vid elastisk respons råder ett linjärt förhållande mellan förskjutning och impuls, se ekvation (4.39), vilket innebär att felet δ_{el} kan uttryckas som

$$\delta_{el} = \frac{u_{el}(I_1) - u_{el}(I_k)}{u_{el}(I_k)} = \frac{\gamma_I u_{el}(I_k) - u_{el}(I_k)}{u_{el}(I_k)} = (\gamma_I - 1) \tag{4.53}$$

Av detta framgår att ett fel δ_{el} = 5 % medför en ökning av faktorn γ_I med 5 %, dvs.

$$\gamma_I = 1 + \delta_{el} \tag{4.54}$$

4.5.2.3 Sammanställning

Genom att kombinera ekvation (4.50) och ekvation (4.54) med de i avsnitt 4.4.2 redovisade sambanden mellan faktorerna γ_I och γ_F så kan ett samband mellan kvoten T / t_1 och förväntat fel δ_{el} i förskjutningen u_{el} bestämmas. I Tabell 4.1 sammanställs denna kvot för olika värden på γ_I och γ_F. Dessa samband kan användas för att räkna ned impulsen I_1 så att ett korrekt värde på den elastiska förskjutningen u_{el} kan tas fram utan användandet av skadekurvor eller numeriska beräkningar.

Tabell 4.1 Sammanställning av samband mellan felet δ_{el}, kvoten T / t_1 och faktorerna γ_I och γ_F för ett system med elastisk respons och last-tidssamband enligt Figur 4.10.

δ_{el} [%]	γ_I [-]	$\frac{T}{t_1} = \pi \cdot \frac{\gamma_F}{\gamma_I}$ $n = 0$	$\frac{T}{t_1} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\gamma_F}{\gamma_I}$ $n = 1$	$\frac{T}{t_1} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\gamma_F}{\gamma_I}$ $n = 2$
1	1,01	12,89	10,60	8,84
2	1,02	9,22	7,45	6,13
3	1,03	7,51	6,10	5,00
4	1,04	6,52	5,33	4,35
5	1,05	5,86	4,75	3,90
10	1,10	4,20	3,41	2,78
15	1,15	3,48	2,82	2,29
20	1,20	3,06	2,47	1,98
25	1,25	2,78	2,23	1,77
50	1,50	2,10	1,56	1,18
75	1,75	1,80	1,23	0,91
100	2,00	1,57	1,02	0,74

Detta innebär exempelvis att om $n = 1$ och kvoten $T / t_1 = 4{,}75$ så är felet $\delta_{el} = 5$ %. vilket innebär att förskjutningen u_{el} kommer att överskattas med 5 % om impulsen I_1 approximativt används som indata i ekvation (4.39). Genom att istället använda $I_k = I_1 / \gamma_I$, där $\gamma_I = 1{,}05$, fås dock en korrekt förskjutning u_{el}.

I vilken mån en godtycklig dynamisk last motsvarar en karakteristisk impulslast beror således på hur stort fel på den resulterande förskjutningen som kan accepteras. Om $n = 1$, och ett fel $\delta_{el} = 2$ % kan accepteras så medför detta att $T / t_1 \geq 7{,}45$ för att lasten ska motsvara en impulslast. Detta kriterium är dock något hårt och ett fel $\delta_{el} = 5$ % eller $\delta_{el} = 10$ % synes mer rimligt. Detta skulle i så fall innebära att $T / t_1 \geq 4{,}75$ respektive $T / t_1 \geq 3{,}41$ för att lasten ska betraktas som en impulslast när den är triangelformad enligt Figur 4.10b.

4.5.3 Plastisk respons

4.5.3.1 Förhållande maxlast och kapacitet

För ett system med plastisk respons gäller enligt ekvation (4.9) att den resulterande förskjutningen u_{pl} av en karakteristisk impulslast I_k uppgår till

$$u_{pl} = \frac{I_k^{\,2}}{2mR} \tag{4.55}$$

Ett motsvarande samband för den plastiska förskjutningen saknas för en karakteristisk trycklast F_k. Dock gäller enligt ekvation (4.26) att

$$F_k = R \tag{4.56}$$

Från (4.44) och (4.45) gäller för ett godtycklig last-tidssamband enligt Figur 4.13 att

$$F_1 = \gamma_F \cdot F_k \tag{4.57}$$

samt

$$I_1 = \gamma_I \cdot I_k \tag{4.58}$$

Genom att kombinera ekvation (4.56) och (4.57) kan γ_F bestämmas som

$$\gamma_F = \frac{F_1}{R} \tag{4.59}$$

där både F_1 och R är kända. Från framtagna skadekurvor i avsnitt 4.4.2 fås ett samband mellan faktorerna γ_F och γ_I, dvs.

$$\gamma_I = \gamma_I(\gamma_F) \tag{4.60}$$

vilket innebär att γ_I kan bestämmas för ett givet värde på γ_F. Därmed kan också motsvarande karakteristiska impuls I_k, via ekvation (4.58), bestämmas som

$$I_k = \frac{I_1}{\gamma_I} \tag{4.61}$$

Dvs. motsvarande karakteristiska impuls minskar med en faktor γ_I.

4.5.3.2 Feluppskattning

Resonemanget om feluppskattning för ett plastiskt system är likvärdigt med det för ett elastiskt system som ges i avsnitt 4.5.2.2. Den stora skillnaden här ligger i att medan den elastiska förskjutningen u_{el} är proportionell mot impulsen så är den plastiska förskjutningen u_{pl} proportionell mot förskjutningen i kvadrat, se ekvation (4.55). Därmed kan felet δ_{pl} uttryckas som

$$\delta_{pl} = \frac{u_{pl}(I_1) - u_{pl}(I_k)}{u_{pl}(I_k)} = \frac{\gamma_I^{\,2} u_{pl}(I_k) - u_{pl}(I_k)}{u_{pl}(I_k)} = \gamma_I^{\,2} - 1 \tag{4.62}$$

vilket omskrivet blir

$$\gamma_I = \sqrt{1 + \delta_{pl}} \tag{4.63}$$

Av detta framgår att ett fel δ_{pl} = 5 % medför en ökning av faktorn γ_I med 2,5 %.

4.5.3.3 Sammanställning

Genom att kombinera ekvation (4.59) och ekvation (4.63) med de i avsnitt 4.4.2 redovisade sambanden mellan faktorerna γ_I och γ_F så kan ett samband mellan kvoten F_1 / R och förväntat fel δ_{pl} i förskjutningen u_{pl} bestämmas. I Tabell 4.2 sammanställs denna kvot för olika värden på γ_I och γ_F. Dessa samband kan användas för att räkna ned impulsen I_1 så att ett korrekt värde på den plastiska förskjutningen u_{pl} kan tas fram utan användandet av skadekurvor eller numeriska beräkningar.

Tabell 4.2 Sammanställning av samband mellan felet δ_{pl} och faktorerna γ_I och γ_F för ett system med plastiskt respons och last-tidssamband enligt Figur 4.10.

δ_{pl} [%]	γ_I [-]	$\gamma_F = \frac{F_1}{R}$ $n = 0$	$\gamma_F = \frac{F_1}{R}$ $n = 1$	$\gamma_F = \frac{F_1}{R}$ $n = 2$
1	1,005	100	-	-
2	1,010	52	70	77
3	1,015	35	46	52
4	1,020	27	35	39
5	1,025	21	29	32
10	1,049	11	15	17
15	1,072	7,7	10	12
20	1,095	6,0	8,0	9,0
25	1,118	5,0	6,7	7,5
50	1,225	3,0	4,0	4,5
75	1,323	2,3	3,1	3,5
100	1,414	2,0	2,7	3,0

Detta innebär exempelvis att om $n = 1$ och $\gamma_F = 10$ så är felet $\delta_{pl} = 15$ %, vilket innebär att förskjutningen u_{pl} kommer att överskattas med 15 % om impulsen I_1 approximativt används som indata i ekvation (4.55). Genom att istället använda $I_k = I_1 / \gamma_I$, där $\gamma_I = \gamma_I\,(\gamma_F = 10) = 1{,}072$, fås dock en korrekt förskjutning u_{pl}.

I vilken mån en godtycklig dynamisk last motsvarar en karakteristisk impulslast beror på hur stort fel på den resulterande förskjutningen som kan accepteras. Om $n = 1$ och ett fel $\delta_{pl} = 2$ % kan accepteras så medför detta att $\gamma_F = 70$ för att lasten ska motsvara en karakteristisk impulslast. I avsnitt 4.5.2.3 anges dock ett fel $\delta_{pl} = 5$ % eller $\delta_{pl} = 10$ % som mer rimligt och används dessa kriterier fås att $\gamma_F = 29$ respektive $\gamma_F = 15$ för att lasten ska betraktas som en impulslast.

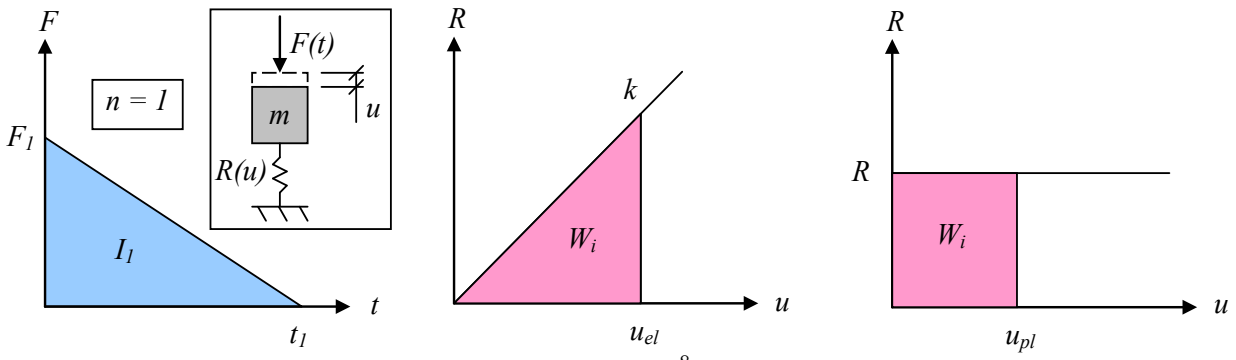
4.5.4 Jämförelse med numeriskt enfrihetsgradsystem

I avsnitt 3.2.5, ekvation (3.17), ges ett uttryck för den dynamiska grundekvationen för ett linjärelastiskt system som

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F(t) \tag{4.64}$$

Lösning av denna ekvation kan göras analytiskt eller med en lämplig numerisk lösningsmetod. För enklare fall fungerar en analytisk lösning bra men för ett godtyckligt fall kan en numerisk lösningsmetod komma bättre till sin rätt. För aktuell ekvation existerar olika typer av lämpliga numeriska lösningsmetoder och i detta arbete har den centrala differensmetoden använts. Detta är en explicit metod, vilket innebär att jämvikt för ett givet tidssteg löses med befintlig information från tidigare tidssteg. Detta medför att en väldigt direkt och enkel lösningsmetod erhålls och eftersom jämvikt uteslutande bygger på redan känd information från tidigare tidssteg lämpar den sig lika väl för både linjära som olinjära problem. Centrala differensmetoden beskrivs översiktligt i Bilaga B.

I detta avsnitt används centrala differensmetoden för att lösa den dynamiska grundekvationen i ekvation (4.64) och används för att ytterligare belysa de observationer som görs i avsnitt 4.5.2 och 4.5.3. I Figur 4.14 illustreras studerat lastfall för ett elastiskt respektive ett plastiskt system.



$F_1 = 2000$ kN $\quad t_1 = 4{,}0$ ms
$I_1 = 4000$ Ns $\quad m = 1000$ kg

$R(u) = k = 2 \cdot 10^8$ N/m

$R(u) = R = 200$ kN

Figur 4.14 Studerat fall för impulsbelastning av elastiskt respektive plastiskt system.

Utgående från dessa värden kan egenvinkelfrekvensen för det elastiska systemet beräknas som

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^8}{1000}} = 447 \text{ rad/s} \tag{4.65}$$

varvid en konservativ bedömning av den elastiska förskjutningen fås som

$$u_{el} = \frac{I_1}{m\omega} = \frac{4000}{1000 \cdot 447} = 8{,}9 \text{ mm} \tag{4.66}$$

Med användande av anvisningarna i Tabell 4.1 kan ett värde på faktorn γ_I bestämmas för att beakta att pålagd dynamisk last skiljer sig från en karakteristisk impulslast. Periodtiden för det elastiska systemet kan beräknas som

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{447} = 14{,}1 \text{ ms} \tag{4.67}$$

varur kvoten T/t_1 kan bestämmas som

$$\frac{T}{t_1} = \frac{14{,}1}{4{,}0} = 3{,}53 \tag{4.68}$$

Detta värde insatt i Tabell 4.1 för kolumn $n = 1$ ger att $\gamma_I \approx 1{,}10$ samt att $\delta_{el} \approx 10$ %. Dvs. en reviderad bedömning av den elastiska förskjutningen fås som

$$u_{el} = \frac{I_k}{m\omega} = \frac{I_1/\gamma_I}{m\omega} = \frac{4000/1{,}10}{1000 \cdot 447} = 8{,}1 \text{ mm} \tag{4.69}$$

För det plastiska systemet fås en konservativ bedömning av förskjutningen som

$$u_{pl} = \frac{I_1^{\,2}}{2mR} = \frac{4000^2}{2 \cdot 1000 \cdot 200 \cdot 10^3} = 40{,}0 \text{ mm} \tag{4.70}$$

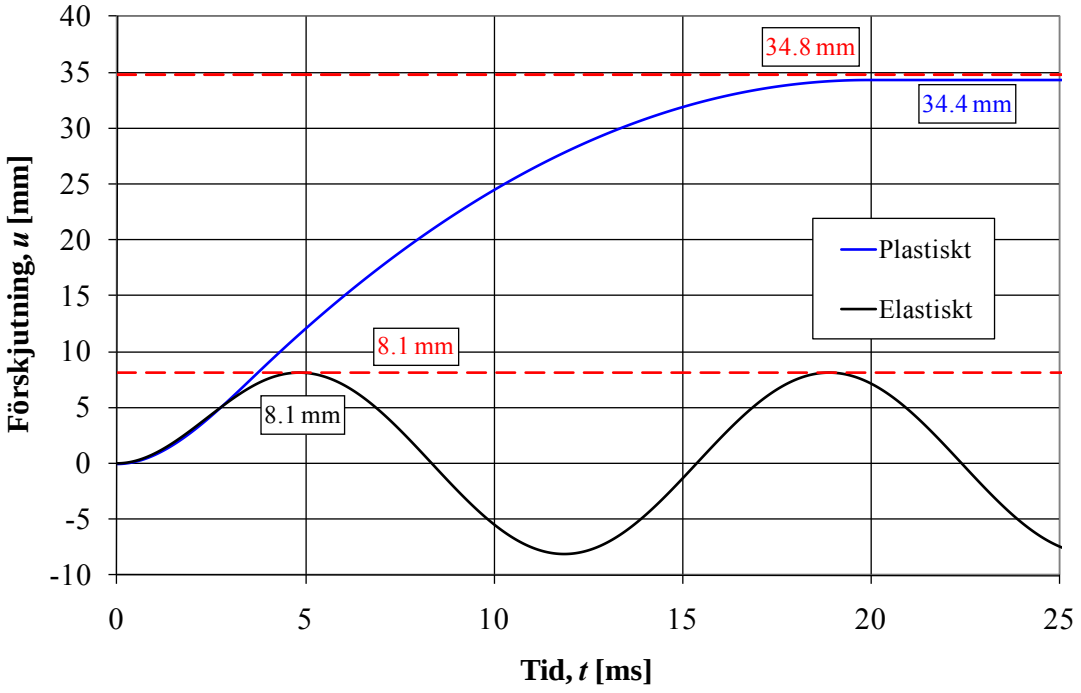
Med användande av anvisningarna i Tabell 4.2 kan ett värde på faktorn γ_I bestämmas för att beakta att pålagd dynamisk last skiljer sig från en karakteristisk impulslast. Faktorn γ_F för det plastiska systemet kan beräknas som

$$\gamma_F = \frac{F_1}{R} = \frac{2000}{200} = 10 \tag{4.71}$$

vilket för $n = 1$ i Tabell 4.2 ger att $\gamma_I = 1{,}072$ samt att $\delta_{pl} = 10$ %. Dvs. en reviderad bedömning av den plastiska förskjutningen fås som

$$u_{pl} = \frac{I_k^{\,2}}{2mR} = \frac{(I_1/\gamma_I)^2}{2mR} = \frac{(4000/1{,}072)^2}{2 \cdot 1000 \cdot 200 \cdot 10^3} = 34{,}8 \text{ mm} \tag{4.72}$$

I Figur 4.15 sammanfattas förskjutnings-tidsambandet för lösning av det elastiska och plastiska systemet när centrala differensmetoden används. Som jämförelse visas även de reviderade förskjutningar som beräknats i ekvation (4.69) och (4.72) för elastiskt respektive plastiskt system. I båda fallen ger en jämförelse att överensstämmelsen är god.



Figur 4.15 Jämförelse av förskjutnings-tidsamband från numerisk lösning av elastiskt och plastiskt system i Figur 4.14 med centrala differensmetoden och reviderade förskjutningar enligt anvisningar i avsnitt 4.5.2.3 och 4.5.3.3.

4.6 Omvandling av balk till ett enfrihetsgradsystem (SDOF)

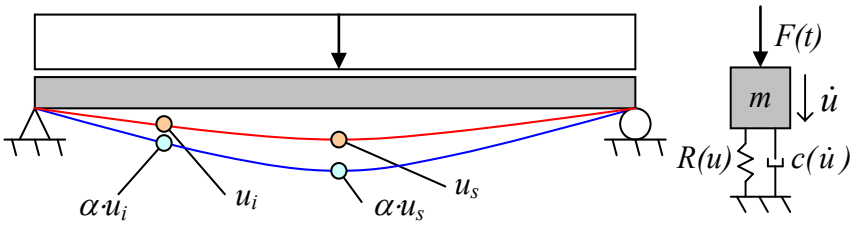
4.6.1 Koncept

I föregående avsnitt har responsen hos ett impulsbelastat och tryckbelastat enfrihetsgradsystem behandlats. För att kunna använda den där presenterade informationen i praktiken är det dock nödvändigt att kunna omvandla en balk till ett sådant förenklat system.

För en statiskt belastad balk med linjärelastiska materialegenskaper kommer dess utböjningsform vara en funktion av lastens utseende samt givna randvillkor. Utböjningsformen förblir densamma oavsett lastnivå, vilket innebär att det är möjligt att beskriva utböjningen längs hela balken genom att enbart använda en punkt, se Figur 4.16. Denna punkt, den såkallade systempunkten, tillskrivs egenskaper så att dess förskjutning u_s motsvaras av den i ett enfrihetsgradsystem, dvs.

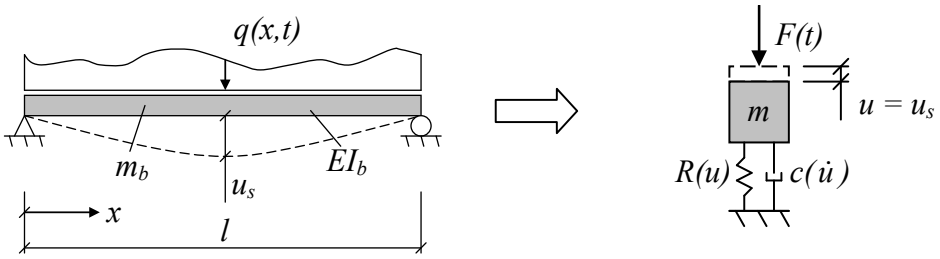
$$u_s = u_{SDOF} \tag{4.73}$$

Vanligt, men inte nödvändigt, är att välja systempunkten till att sammanfalla med den punkt på balken som har störst förskjutning. Ett annat vanligt alternativ är att placera systempunkten i balkens mittpunkt.



Figur 4.16 En balk med konstant utböjningsform medför att en ökad förskjutning med faktorn α gör att förskjutningen längs hela balken ökar med denna faktor. Därmed kan förskjutningen längs balken beskrivas via förskjutningen u_s i balkens systempunkt.

Omvandling av balken till ett ekvivalent enfrihetsgradsystem görs genom att i systempunkten applicera en massa m, en dämpning c, en mothållande kraft $R(u)$ samt en yttre last F(t). I Figur 4.17 jämförs ingående parametrar i en balk med dem för ett ekvivalent enfrihetsgradsystem.



Figur 4.17 Jämförelse av parametrar ingående hos balk samt i ekvivalent enfrihetsgradsystem.

Kopplingen mellan balk och ekvivalent enfrihetsgradsystem kan med antagande om linjärelastisk respons, $R(u) = ku$, tecknas som

$$m = \kappa_m m_b \tag{4.74}$$

$$c = \kappa_c c_b \tag{4.75}$$

$$k = \kappa_k k_b \tag{4.76}$$

$$F = \kappa_F F_b \tag{4.77}$$

där m_b, c_b, k_b och F_b motsvarar balkens aktuella massa, dämpning, styvhet samt yttre last och κ är transformationsfaktorer för respektive egenskap. Dvs. uttrycket för det dynamiska systemet kan ändras från

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F(t) \tag{4.78}$$

till

$$\kappa_m m_b \ddot{u} + \kappa_c c_b \dot{u} + \kappa_k k_b u = \kappa_F F_b(t) \tag{4.79}$$

En impulslast är ett kortvarigt förlopp varvid dämpningens betydelse är liten för den resulterande maximala förskjutningen. Det är därför vanligt att på säker sida bortse från dämpningens inverkan. Med utgångspunkt från att dämpningen försummas kan ekvation (4.79) skrivas som

$$\kappa_m m_b \ddot{u} + \kappa_k k_b u = \kappa_F F_b(t) \tag{4.80}$$

vilket för en godtycklig typ av system även kan tecknas som

$$\kappa_m m_b \ddot{u} + \kappa_k R_b(u) = \kappa_F F_b(t) \tag{4.81}$$

där $R_b(u)$ beskriver balkens respons vid statisk belastning.

Transformationsfaktorerna κ bestäms utgående från en energibetraktelse hos det ursprungliga balk-systemet och det förenklade enfrihetsgradsystemet där kriteriet är att den rörelseenergi som innehas av massan m eller det arbete som uträttas av den yttre lasten F samt den inre kraften R i enfrihetsgradsystemet ska vara densamma som den energi som beskrivs av balkens massa m_b, yttre last F_b samt mothållande inre kraft R_b i hela balken. Hur en sådan energibetraktelse görs behandlas mer ingående i avsnitt 4.6.2 samt Bilaga A.

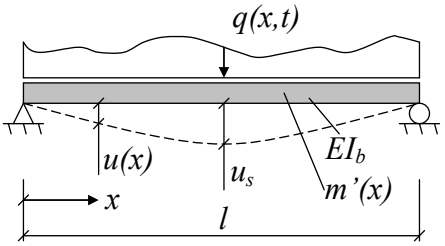
4.6.2 Transformationsfaktorer κ

4.6.2.1 Utböjningsform, massfördelning och lastpåläggning

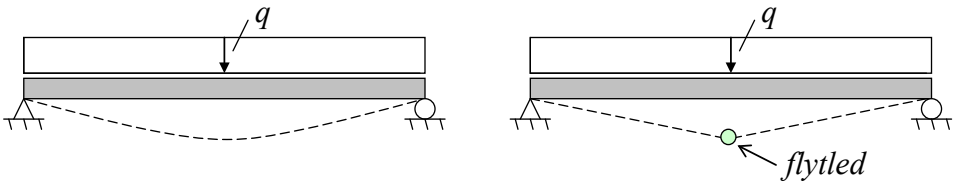
De uttryck för transformationsfaktorn κ som ges i avsnitt 4.6.2.2 till 4.6.2.3 utgår från ett generellt balkfall illustrerat enligt Figur 4.18. För en balk med linjärelastisk respons kan utböjningsformen *u(x)* bestämmas utgående från elementarfall för ett antal olika lastkombinationer, se exempelvis Samuelsson och Wiberg (1988). För mer komplexa belastningsfall eller där styvheten varierar över balkens längd är det möjligt att ta fram en analytisk deformationsbild men enklare att göra så via en numerisk beräkning i ett finita elementprogram. För en balk med plastiskt material är det normalt att använda en förenklad utböjningsform som svarar mot den deformationsbild som råder när en mekanism har uppstått, varför denna utböjningsform blir densamma oberoende av randvillkor, se Figur 4.19.

Balkens massa per längdenhet *m'(x)* kan variera, främst som en följd av varierande tvärsnitts-dimension, men teoretiskt även på grund av variabel densitet hos ingående material. En varierad massa kan även vara en följd av en koncentrerad massa, exempelvis från en vikt som träffar en balk. De i denna rapport redovisade transformationsfaktorer är dock framtagna med förutsättning om ett konstant balktvärsnitt, en konstant densitet samt att lasten genererats av en stötvåg där den framrusande luftens vikt kan försummas, dvs. $m'(x) = m'$ antas vara konstant över balkens längd. Här redovisade uttryck medtar dock massans inverkan för fullständighetens skull.

Den utbredda lasten *q(x,t)* kan variera godtyckligt men kommer i ett sådant fall också, vid linjärelastisk respons, påverka den resulterande utböjningsformen *u(x)*. För en balk med plastisk respons kan utböjningsformen *u(x)* variera beroende på angreppspunkt och utbredning i enlighet med flytledsteori, se exempelvis Samuelsson och Wiberg (1990). I denna rapport behandlas dock endast jämnt utbredd last samt punktlast i balkmitt.



Figur 4.18 Balk med variabel massa m'(x), variabel lastpåläggning q(x) samt variabel nedböjning u(x).



Figur 4.19 Utböjningsform hos fritt upplagd balk belastad med jämnt utbredd last när ingående linjärelastisk respektive plastisk respons antas. Vid plastisk respons fås, via flytleds-teori, samma utböjningsform oavsett om balken är fast inspänt eller fritt upplagd.

4.6.2.2 Bevarande av rörelseenergi – κ_m

Den ekvivalenta massan m ska vara sådan att den vid systempunktens verkliga rörelse får samma rörelseenergi som det verkliga balksystemet. Rörelseenergin kan tecknas som

$$E_k = \frac{m \cdot v_s^{\,2}}{2} = \int_{x=0}^{x=l} \frac{m'(x) \cdot v(x)^2}{2} dx \tag{4.82}$$

där v_s är hastigheten i balkens systempunkt medan $m'(x)$ och $v(x)$ är massa per längdenhet respektive hastighet hos balken i snitt x. Med nyttjande av att

$$v_s = \frac{\Delta u_s}{\Delta t} \tag{4.83}$$

$$v(x) = \frac{\Delta u(x)}{\Delta t} \tag{4.84}$$

kan ekvation (4.82) uttryckas som

$$m \cdot u_s^{\,2} = \int_{x=0}^{x=l} m'(x) \cdot u(x)^2 \, dx \tag{4.85}$$

vilket tillsammans med ekvation (4.74) ger ett uttryck för κ_M som

$$\kappa_m = \int_{x=0}^{x=l} \frac{m'(x) \cdot u(x)^2}{m_b \cdot u_s^{\,2}} dx \tag{4.86}$$

För ett fall där $m'(x) = m'$ är konstant gäller att balkens totala massa m_b kan uttryckas som

$$m_b = m' \cdot l \tag{4.87}$$

vilket insatt i ekvation (4.86) gör att denna kan förenklas till

$$\kappa_m = \frac{1}{l} \int_{x=0}^{x=l} \frac{u(x)^2}{u_s^{\,2}} dx \tag{4.88}$$

Detta uttryck används också i Bilaga A vid härledning av värden på κ_m för några vanligen förekommande lastfall.

4.6.2.3 Bevarande av yttre energi – κ_F

Den ekvivalenta yttre lasten F ska vara sådan att den vid systempunktens rörelse uträttar samma yttre arbete som de verkliga krafterna tillsammans uträttar vid sina respektive verkliga förskjutningar. Det uträttade arbetet kan tecknas som

$$W_y = F \cdot u_s = \int_{x=0}^{x=l} q(x) \cdot u(x) dx \tag{4.89}$$

vilket tillsammans med ekvation (4.77) ger att transformationsfaktorn κ_F kan uttryckas som

$$\kappa_F = \int_{x=0}^{x=l} \frac{q(x) \cdot u(x)}{F_b \cdot u_s} dx \tag{4.90}$$

där

$$F_b = \int_{x=0}^{x=l} q(x) dx \tag{4.91}$$

För ett fall där $q(x)$ är konstant, dvs. $q(x) = q$, gäller att

$$F_b = q \cdot l \tag{4.92}$$

vilket insatt i ekvation (4.90) gör att denna kan förenklas till

$$\kappa_F = \frac{1}{l} \int_{x=0}^{x=l} \frac{u(x)}{u_s} dx \tag{4.93}$$

Detta uttryck används också i Bilaga A vid härledning av värden på κ_F för några vanligen förekommande lastfall.

4.6.2.4 Bevarande av inre energi – κ_k

Den ekvivalenta mothållande inre kraften R ska vara sådan att den vid systempunktens rörelse uträttar ett arbete som är lika stort som det verkliga systemets inre deformationsarbete.

Enligt Nyström (2006) kan ändringen i inre arbete ΔW_i uttryckas som

$$\Delta W_i = N \cdot \Delta n + V \cdot \Delta v + M \cdot \Delta \varphi \tag{4.94}$$

där N, V och M är normalkraft, tvärkraft respektive moment och Δn, Δv och $\Delta \varphi$ är ändring i longitudinell förskjutning, tvärförskjutning respektive vinkeländring. För ett linjärelastiskt material kan det inre arbetet skrivas som

$$W_i = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=l}\left(\frac{N(x)^2}{EA} + \frac{\beta V(x)^2}{GA} + M(x)\cdot u''(x)\right)dx \tag{4.95}$$

där E är elasticitetsmodul, A är tvärsnittets area, β är en konstant för att beakta skjuvspänningen, V är tvärkraft, G är skjuvmodul, $M(x)$ är momentet samt $u''(x)$ är balkens krökning. Bidragen från normal- och tvärkraft är för en balk vanligtvis små och kan i regel försummas. Därmed kan ekvation (4.95) förenklas till

$$W_i = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=l} M(x)\cdot u''(x)dx \tag{4.96}$$

För ett enfrihetsgradsystem kan, enligt ekvation (4.4), den inre energin uttryckas som

$$W_i = \frac{ku_s^{\ 2}}{2} \tag{4.97}$$

Kombinering av ekvation (4.76), (4.96) och (4.97) ger då att κ_K kan uttryckas som

$$\kappa_k = \int_{x=0}^{x=l} \frac{M(x)\cdot u''(x)}{k_b \cdot u_s^{\ 2}}dx \tag{4.98}$$

Styvheten k_b för en balk kan dock uttryckas som

$$k_b = \frac{F_b}{u_s} \tag{4.99}$$

vilket insatt i ekvation (4.98) ger

$$\kappa_k = \int_{x=0}^{x=l} \frac{M(x)\cdot u''(x)}{F_b \cdot u_s}dx \tag{4.100}$$

där F_b bestäms enligt ekvation (4.91). Enligt Biggs (1964) gäller att

$$\kappa_k = \kappa_F \tag{4.101}$$

och att så är fallet visas också i Nyström (2006) för ett antal belastningsfall.

4.6.3 Sammanställning av κ för olika belastningsfall

I ekvation (4.80) har det visats att

$$\kappa_m m_b \ddot{u} + \kappa_k k_b u = \kappa_F F_b(t) \tag{4.102}$$

vilket kan skrivas om som

$$\frac{\kappa_m}{\kappa_F} m_b \ddot{u} + \frac{\kappa_k}{\kappa_F} k_b u = F_b(t) \tag{4.103}$$

Genom att låta

$$\kappa_{mF} = \frac{\kappa_m}{\kappa_F} \tag{4.104}$$

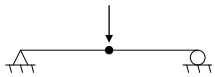
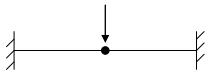
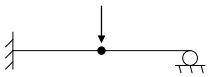
samt nyttja ekvation (4.101) kan ekvation (4.103) skrivas om som

$$\kappa_{mF} m_b \ddot{u} + k_b u = F_b(t) \tag{4.105}$$

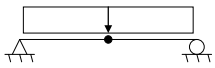
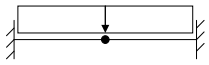
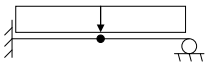
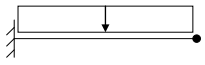
vilket innebär att det enbart är balkens massa m_b som ska påverkas av en faktor κ_{MF} för att omvandla en balk till ett enfrihetsgradsystem.

Härledning av κ_m och κ_F görs i Bilaga A via uttryck från avsnitt 4.6.2.2 och 4.6.2.3 och sammanställs i Tabell 4.3 och Tabell 4.4 för ett antal studerade fall.

Tabell 4.3 Sammanställning av transformationsfaktorer κ_M, κ_F samt κ_{MF} för balk med varierande randvillkor och belastad med punktlast. Härledning görs i Bilaga A.

	Punktlast			
				
	Utböjningskurva elastiskt fall			
κ_m	0,486	0,371	0,445	0,236
κ_F	1,000	1,000	1,000	1,000
κ_{mF}	0,486	0,371	0,446	0,236
	Utböjningskurva plastiskt fall			
κ_m	0,333	0,333	0,333	0,333
κ_F	1,000	1,000	1,000	1,000
κ_{mF}	0,333	0,333	0,333	0,333

Tabell 4.4 Sammanställning av transformationsfaktorer κ_M, κ_F samt κ_{MF} för balk med varierande randvillkor och belastad med jämnt utbredd last. Härledning görs i Bilaga A.

	Jämnt utbredd last			
				
	Utböjningskurva elastiskt fall			
κ_m	0,504	0,406	0,483	0,257
κ_F	0,640	0,533	0,600	0,400
κ_{mF}	0,787	0,762	0,805	0,642
	Utböjningskurva plastiskt fall			
κ_m	0,333	0,333	0,333	0,333
κ_F	0,500	0,500	0,500	0,500
κ_{mF}	0,667	0,667	0,667	0,667

4.7 Ekvivalent statisk last samt resulterande moment för en balk

4.7.1 Orientering

Såsom behandlats i föregående avsnitt är det möjligt att med en dynamisk beräkningsmodell bedöma responsen hos en given konstruktion utsatt för en dynamisk last. Ofta är det dock önskvärt att översätta en sådan dynamisk last till en motsvarande statisk last. Anledningen till detta är dels att det vanligen är enklare för konstruktören att handskas med statiska laster – vanan att använda samt bedöma responsen från dessa är större – och dels pedagogiskt användbart för att ge en ökad förståelse till vad en dynamisk belastning innebär för en konstruktion.

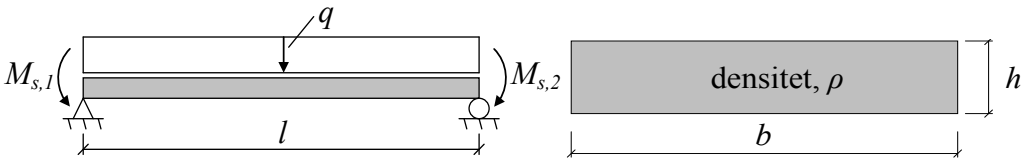
I avsnitt 4.2.3 har den ekvivalenta statiska lasten för ett enfrihetsgradsystem tagits fram för elastisk respektive plastisk respons när den dynamiska lasten utgörs av en karakteristisk impulslast I_k respektive en karakteristisk trycklast F_k. För en impulslast kan den ekvivalenta statiska lasten Q vid elastisk respons uttryckas som

$$Q_{el} = I_k \sqrt{\frac{k}{m}} = I_k \omega \tag{4.106}$$

och vid plastisk respons som

$$Q_{pl} = \frac{I_k^{\,2}}{2m \cdot u_{pl}} \tag{4.107}$$

där I_k är karakteristisk impulslast, k är styvhet, m är massa och u_{pl} är plastisk förskjutning. I detta avsnitt utgås från dessa uttryck för en balk med rektangulärt tvärsnitt med bredden b, höjden h samt densiteten ρ.



Figur 4.20 Balk för framtagning av ekvivalent statisk last och moment. Beteckningar $M_{s,1}$ och $M_{s,2}$ representerar de stödmoment som uppstår av balkens aktuella randvillkor.

4.7.2 Elastisk respons

Utgå från ekvation (4.17) i avsnitt 4.2.3.2 vilken ger att

$$Q_{el} = I \sqrt{\frac{k}{m}} = I\omega \tag{4.108}$$

där Q_{el} är ekvivalent statisk last för det elastiska systemet, I är impulslast, k och m är systemets styvhet respektive massa. Utgående från ekvation (4.105) gäller att den dynamiska grundekvationen, efter omvandling från en balk till ett enfrihetsgradsystem, kan uttryckas som

$$\kappa_{mF} m_b \ddot{u} + k_b u = F_b(t) \tag{4.109}$$

där κ_{MF} är en transformationsfaktor som beaktar både massan och lasten enligt avsnitt 4.6.3. Detta innebär att

$$m = \kappa_{mF} m_b \tag{4.110}$$

$$k = k_b \tag{4.111}$$

kan användas för att uttrycka enfrihetsgradsystemets massa och styvhet utgående från balkens totala massa m_b och styvhet k_b. För en balk med längden l och bredden b kan impulsen I beräknas som

$$I = i \cdot b \cdot l \tag{4.112}$$

där i är impulstäthet. För en balk med en jämnt utbredd last kan den totala lasten Q_{el} på motsvarande sätt tecknas som

$$Q_{el} = q_{el} \cdot b \cdot l \tag{4.113}$$

där q_{el} är lastintensitet för det elastiska systemet. Balkens styvhet fås via sambandet

$$k_b = \frac{EI_b}{\alpha l^3} \tag{4.114}$$

där α är en faktor som beaktar balkens randvillkor. Kombineras ekvation (4.110) till (4.114) med ekvation (4.108) fås slutligen att

$$q_{el} = \sqrt{\frac{EI_b}{\kappa_{mF} m_b \cdot \alpha l^3}} \cdot i \tag{4.115}$$

För en balk med konstant rektangulärt tvärsnitt med bredden b, höjden h och densiteten ρ kan balkens massa m beräknas som

$$m = bh \cdot l \cdot \rho \tag{4.116}$$

och tröghetsmomentet I_b som

$$I_b = \frac{bh^3}{12} \tag{4.117}$$

vilket insatt i ekvation (4.114) ger att denna kan skrivas om som

$$q_{el} = \sqrt{\frac{E}{12\kappa_{mF} \alpha \cdot \rho}} \cdot \frac{i \cdot h}{l^2} \tag{4.118}$$

För en balk i ett spann med en utbredd last gäller att summan av stöd- och fältmoment, $M_{s,1}$ och $M_{s,2}$ respektive M_f, kan uttryckas som

$$\frac{1}{2}\left(M_{s,1}+M_{s,2}\right)+M_f=\frac{q_{el}l^2}{8} \tag{4.119}$$

vilket kombinerat med ekvation (4.118) ger att momentet i balken kan uttryckas som

$$\frac{1}{2}\left(M_{s,1}+M_{s,2}\right)+M_f=\frac{i\cdot h}{16\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\frac{E}{\kappa_{mF}\alpha\cdot\rho}} \tag{4.120}$$

En intressant iakttagelse utgående från detta är således att det resulterande momentet inte är en funktion av balkens spännvidd utan istället av tvärsnittshöjd, elasticitetsmodul samt densitet.

4.7.3 Plastisk respons

Utgå från ekvation (4.20) i avsnitt 4.2.3.3, vilken ger att

$$Q_{pl}=R \tag{4.121}$$

där Q_{pl} är ekvivalent statisk last för det plastiska systemet och R är dess kapacitet. På motsvarande sätt som för ett elastiskt system, se avsnitt 4.7.2, så gäller här att

$$m=\kappa_{mF}m_b \tag{4.122}$$

$$I=i\cdot b\cdot l \tag{4.123}$$

$$Q_{pl}=q_{pl}\cdot b\cdot l \tag{4.124}$$

där κ_{MF} är en transformationsfaktor som beaktar både massan och lasten enligt avsnitt 4.6.3, m_b är balkens totala massa, q_{pl} är lastintensiteten för det plastiska systemet, b och l är balkens bredd respektive längd, I är impuls och i är impulstäthet. Sambandet mellan impuls I och kapacitet R fås via den plastiska förskjutningen som

$$u_{pl}=\frac{I^2}{2mR} \tag{4.125}$$

vilket innebär att q_{pl}, via kombinering av ekvation (4.121) till (4.125) kan skrivas som

$$q_{pl}=\frac{i^2\cdot b\cdot l}{2\kappa_{mF}m\cdot u_{pl}} \tag{4.126}$$

För en balk med konstant rektangulärt tvärsnitt med bredden b, höjden h och densiteten ρ kan balkens massa m beräknas som

$$m=bh\cdot l\cdot\rho \tag{4.127}$$

vilket insatt i ekvation (4.126) ger att denna kan skrivas om som

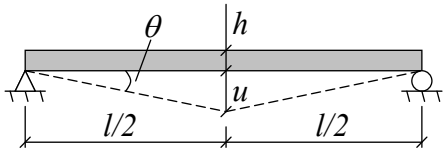
$$q_{pl} = \frac{i^2}{2\kappa_{mF} \cdot h \cdot \rho \cdot u_{pl}} \tag{4.128}$$

För en balk med plastisk respons kan dock förskjutningen u_{pl}, enligt Figur 4.21, beskrivas som

$$u_{pl} = \frac{\theta_{pl} l}{2} \tag{4.129}$$

där θ_{pl} är plastisk rotation. Detta ger att ekvation (4.128) kan skrivas som

$$q_{pl} = \frac{i^2}{\kappa_{mF} \cdot \rho \cdot l \cdot \theta_{pl}} \tag{4.130}$$



Figur 4.21 Deformationsbild hos balk med plastisk respons.

För en balk i ett spann med en utbredd last gäller att summan av stöd- och fältmoment, $M_{s,1}$ och $M_{s,2}$ respektive M_f, kan uttryckas som

$$\frac{1}{2}\left(M_{s,1} + M_{s,2}\right) + M_f = \frac{q_{pl} l^2}{8} \tag{4.131}$$

vilket kombinerat med ekvation (4.128) ger att momentet i balken kan uttryckas som

$$\frac{1}{2}\left(M_{s,1} + M_{s,2}\right) + M_f = \frac{i^2 \cdot l}{8\kappa_{mF} \cdot \rho \cdot \theta_{pl}} \tag{4.132}$$

Av detta är det intressant att notera att det resulterande momentet är proportionellt mot balkens spännvidd samt omvänd proportionell mot densitet och plastisk rotationskapacitet.

4.7.4 Kommentar

De i ekvation (4.120) och (4.132) framtagna uttrycken är användbara eftersom de ger en känsla för betydelsen av olika parametrar på det resulterande momentet hos en impulsbelastad balk. Motsvarigheten för en statiskt belastad balk är

$$\frac{1}{2}\left(M_{s,1} + M_{s,2}\right) + M_f = \frac{q \cdot l^2}{8} \tag{4.133}$$

vilket tydligt visar en viktig skillnad mellan en statiskt belastad och impulsbelastad balk. Den stora betydelse som spännvidden har för resulterande moment i en statiskt belastad balk – M propor-

tionellt mot l^2 – försvinner helt hos en impulsbelastad balk med elastisk respons och minskas till enbart M proportionellt mot l för en balk med plastisk respons. Vidare får balkens massa, via densiteten, en betydande inverkan på resulterande moment. För en elastisk balk medför en ökad styvhet – via elasticitetsmodul E och tvärsnittshöjd h – ett ökat resulterande moment medan en stor rotationskapacitet hos en plastisk balk innebär ett minskat moment.

4.8 Brottkriterier

4.8.1 Orientering

I denna rapport används förskjutningen hos den impulsbelastade konstruktionen som ett mått för att beskriva vilka påkänningar som uppstår hos denne. I avsnitt 4.7 ges en koppling mellan impulslast och ekvivalent statisk last och utgående från detta kan moment och tvärkrafter hos konstruktionen beräknas och kapacitetskontroll utföras som för en statiskt belastad konstruktion. Vid elastisk respons kan erforderlig lastkapacitet bestämmas tämligen direkt utan införandet av några nyheter jämfört med statiska förhållanden. Vid plastisk respons likställs dock den ekvivalenta statiska lasten med konstruktionens kapacitet varvid ett nytt kriterium, tillåten förskjutning, införs. För att bestämma konstruktionens bärförmåga blir det således nödvändigt att förutom maximal lastkapacitet även bedöma tillhörande tillåtna förskjutning. Detta är möjligt genom användandet av en konstruktions rotationskapacitet, något som även används i statiska förhållanden för att beskriva den plastiska omlagringsförmågan hos en konstruktion.

Kapacitetskontroll ska göras med hänsyn till både moment och tvärkraft. Framtagen ekvivalent statisk last är tillräcklig för att fånga den huvudsakliga responsen hos konstruktionen i det ögonblick som maximal deformation uppstår, något som även innefattar maximalt moment och tvärkraft i detta läge. Vid en impulsbelastning kan dock mycket höga tvärkrafter inledningsvis även uppstå nära stöd eller kring lastangripen punkt och ge upphov till en alternativ brottmod som på engelska benämns *direct shear*. Dimensionering av denna brottmod berörs inte närmare i denna rapport och för hantering av denna hänvisas till Bk 25:1, Fortifikationsförvaltningen (1973a).

4.8.2 Rotationskapacitet

4.8.2.1 Undersökta beräkningsmetoder

I litteraturen anges flera olika metoder att bedöma en konstruktions deformationsförmåga. Här behandlas rotationskapaciteten hos armerade betongkonstruktioner enligt fem källor. Två av dessa, Betonghandboken (1990) och Eurokod 2, CEN (2004), är framtagna med avsikt att användas vid statisk belastning medan övriga tre är anpassade till impulsbelastade konstruktioner. De skillnader som föreligger i rekommenderade kapaciteter kan åtminstone delvis ha sin grund i skilda användningsområden. Bakgrundsmaterialet för samtliga här presenterade metoder har inte gåtts igenom så det saknas belägg för att så verkligen är fallet men det förefaller inte orimligt att olika grader av konservatism kan ha nyttjats i anvisningar avsedda för statisk respektive impulsartad belastning.

I denna rapport ges ingen djupare teoretisk inblick i om hur, eller varför, olika parametrar påverkar den resulterande rotationskapaciteten hos en given konstruktion, för detta hänvisas istället till exempelvis Johansson (1997).

4.8.2.2 Betonghandboken

I Betonghandboken (1990) ges ett empiriskt framtaget uttryck för att uppskatta tillåten plastisk rotation θ hos en armerad betongbalk

$$\theta = A \cdot B \cdot C \cdot 10^{-3} \tag{4.134}$$

Uttrycket består av tre olika delar där faktorn A tar hänsyn till inverkan av byglar, tryckarmering samt dragarmering, faktorn B beaktar armeringens mekaniska egenskaper och faktorn C flytledens läge i förhållande till momentkurvans utseende.

Faktorn A beräknas som

$$A = 1 + 0{,}6 \cdot \omega_v + 1{,}7\omega_s^{'} - 1{,}4\frac{\omega_s}{\omega_{bal}} \tag{4.135}$$

där ω_v, ω_s' och ω_s betecknar mekanisk armeringskvot för byglar, tryckarmering respektive dragarmering. Dessa beräknas som

$$\omega_v = \frac{A_v}{bs} \cdot \frac{f_{sv}}{f_{ct}} \tag{4.136}$$

$$\omega_s^{'} = \frac{A_s^{'}}{bd} \cdot \frac{f_{sc}}{f_{cc}} \tag{4.137}$$

$$\omega_s = \frac{A_s}{bd} \cdot \frac{f_{st}}{f_{cc}} \tag{4.138}$$

där A_v, A_s' och A_s samt f_{sv}, f_{sc} och f_{st} är armeringsarea respektive hållfasthet för byglar, tryckarmering och dragarmering, f_{ct} och f_{cc} är betongens drag- och tryckhållfasthet, s är bygelavstånd samt b och d är tvärsnittets tryckzonsbredd respektive effektiva höjd. Faktorn ω_{bal}, balanserad mekanisk armeringskvot, är ett mått på när dragarmeringen flyter och beräknas som

$$\omega_{bal} = \frac{0{,}8 \cdot \varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{sy}} \tag{4.139}$$

där ε_{cu} = 3,5 ‰ är betongens brottstukning och ε_{sy} är armeringens flytgräns beräknad som

$$\varepsilon_{sy} = \frac{f_{st}}{E_s} \tag{4.140}$$

där E_s är armeringens elasticitetsmodul.

I Betonghandboken anges ett antal begränsningar på inverkan från byglar (ω_v) och tryckarmering (ω_s') och det är exempelvis inte tillåtet att medräkna något tillskott till θu om studerad betongkonstruktion inte samtidigt är armerad med byglar. Detta krav har sin bakgrund i att det annars finns risk för att tryckarmeringen ska knäcka ut och förlora sin gynnsamma inverkan på

tvärsnittets rotationskapacitet. Vidare är det inte heller tillåtet att tillgodoräkna sig en högre mekanisk armeringskvot för tryckarmering än för dragarmeringen, dvs. $\omega_s' \leq \omega_s$.

Faktorn B beaktar armeringens arbetskurva och tilldelas värde enligt Tabell 4.5. Beroende på armeringstyp begränsas även produkten av faktor A och B. De här angivna armeringstyperna är de som i Sverige användes fram till mitten av 1990-talet och hur en översättning till idag använda armeringstyper ska göras kommenteras i avsnitt 4.8.3.1.

Tabell 4.5 Värden på faktorn B. Baserat på Betonghandboken (1990).

Armeringstyp	B	Max A·B
Ks 60, Ks 40, Ss 26, Ss 26S	1,0	1,7
Ks 60S, Ks 40S [1)]	0,8	1,1
Kallbearbetat stål med $\varepsilon_{su} \geq 3$ % och $f_{su}/f_{sy(0,2)} \geq 1{,}1$	$0{,}6 \cdot \left(1 - 0{,}7 \dfrac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{su}}\right)$	0,5

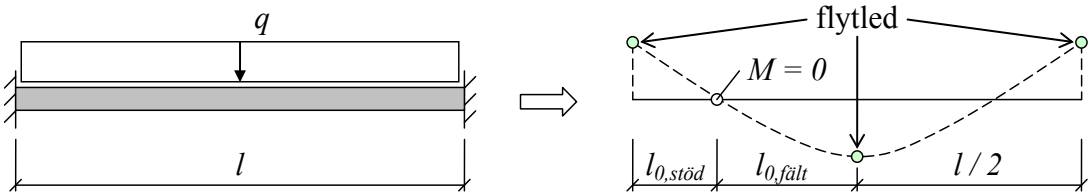
[1)] Om $f_{su}/f_{sy} \geq 1{,}4$ och $\varepsilon_{su} \geq 8$ % används värden för Ks 60 och Ks 40.

Faktorn C tar hänsyn till flytledens läge i konstruktionen och olika definitioner används för flytled över stöd eller i fält

$$C_{stöd} = 10 \cdot l_{0,stöd} / d \tag{4.141}$$

$$C_{fält} = 7 \cdot l_{0,fält} / d \tag{4.142}$$

där $l_{0,stöd}$ och $l_{0,fält}$ är avståndet från flytled till vald momentnollpunkt enligt Figur 4.22.



Figur 4.22 Definition av $l_{0,stöd}$ och $l_{0,fält}$.utgående från aktuell momentkurva.

4.8.2.3 Bk 25

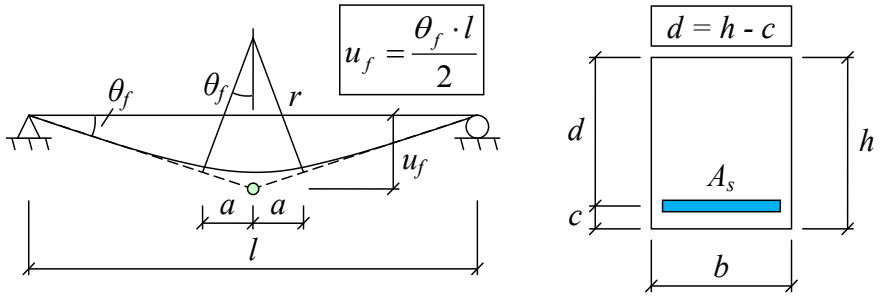
I Bk 25:1, Fortifikationsförvaltningen (1973a), ges dimensioneringsanvisningar för impulsbelastade betongbalkar och betongplattor. Som komplement till denna finns även utgiven Bk 25:2, Fortifikationsförvaltningen (1973b), vilken innehåller kommentarer samt teoretisk bakgrund till vissa avsnitt i Bk 25:1. En reviderad upplaga av Bk 25:1 utkom 1977 med smärre ändringar. Här presenterad behandlar dock enbart de bakomliggande uttrycken för tillåten deformationskapacitet hos en betongkonstruktion som finns återgivna i Bk 25:2, varför ändringar i den reviderade upplagan av Bk 25:1 inte har beaktats.

I Bk 25:2 ges anvisningar om hur tillåten rotationskapacitet ska beräknas för en fritt upplagd respektive en kontinuerlig balk belastad med en kortvarig luftstötvåg. En del av de i Bk 25:2 använda beteckningarna har till viss del omarbetats för att bättre stämma överens med idag mer vanligt förekommande nomenklatur men i övrigt är innehållet likvärdigt.

För den fritt upplagda balken representeras flytleden av ett område med längden *2a* som inom detta område kröks med en konstant krökningsradie *r*, se Figur 4.23. Sträckan *a* baseras på ett uttryck hämtat från Plem (1972)

$$a = 0{,}5 \cdot d + 0{,}15 \cdot l \tag{4.143}$$

där *d* är tvärsnittets effektiva höjd och *l* är balkens längd.



Figur 4.23 Modell för rotationskapacitet hos flytled i fritt upplagd balk. Baserad på Fortifikationsförvaltningen (1973b).

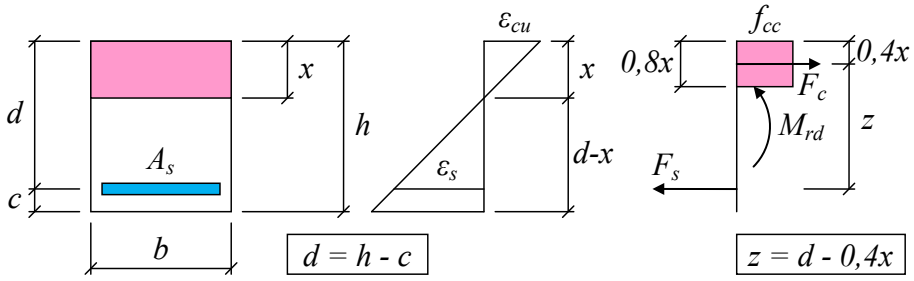
I denna modell påverkar flytledens utbredning *a* rotationskapaciteten θ_f proportionellt

$$\theta_f = \frac{a}{r} \tag{4.144}$$

Maximalt tillåten krökningsradie baseras på tillåten ståltöjning samt betongstukningen för tvärsnittet. Krökningen kan beräknas som

$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_{cu}}{x} = \frac{\varepsilon_s}{d - x} \tag{4.145}$$

där ε_{cu} är betongens brottöjning, ε_s är stålets medeltöjning över sträckan *a*, och *x* samt *d* är tvärsnittets tryckzonshöjd respektive effektiva höjd enligt Figur 4.24. Som brottkriterium fås antingen att betongen krossas eller att armeringen slits av när de når töjningen ε_{cu} respektive ε_s.



Figur 4.24 Tvärsnittsanalys av momentutsatt betongtvärsnitt.

En horisontell kraftjämvikt, $F_c = F_s$, för tvärsnitt illustrerat i Figur 4.24 ger att

$$f_{cc} b \cdot 0{,}8x = f_{st} \cdot A_s \tag{4.146}$$

vilket kombinerat med definition av armeringsmängd som

$$\rho = \frac{A_s}{bd} \tag{4.147}$$

samt mekanisk armeringskvot som

$$\omega_s = \frac{A_s}{bd} \cdot \frac{f_{st}}{f_{cc}} \tag{4.148}$$

att tryckzonshöjden x kan uttryckas som

$$x = \frac{1}{0{,}8} \cdot \rho d \cdot \frac{f_{st}}{f_{cc}} = \frac{\omega_s d}{0{,}8} \tag{4.149}$$

eller omskrivet

$$\frac{x}{d} = \frac{\omega_s}{0{,}8} \tag{4.150}$$

Av detta kan gränsen för när olika brottkriterier inträffar utgående från ekvation (4.145) skrivas som

$$\omega_{s,krit} = \frac{0{,}8 \cdot \varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_s} \tag{4.151}$$

Dvs. för värden på $\omega_{s,krit}$ lägre än detta fås avslitning av armeringen och för värden högre än detta värde fås krossning av betongen.

Eftersom $\varepsilon_s >> \varepsilon_{cu}$ normalt gäller så används i Bk 25:2 en approximation av ekvation (4.151) varvid detta istället uttrycks som

$$\omega_{s,krit} = \frac{0{,}8 \cdot \varepsilon_{cu}}{\varepsilon_s} \tag{4.152}$$

Denna approximation är rimlig men i här utförda beräkningar används det mer exakta uttrycket i ekvation (4.151).

Med antagande om att betongkrossning är avgörande, dvs. $\omega_s > \omega_{s,krit}$, fås genom kombinering av ekvation (4.143), (4.144) samt (4.149) att rotationskapaciteten θ_f kan uttryckas som

$$\theta_f = \frac{a}{r} = \frac{0{,}5d + 0{,}15l}{r} = \frac{0{,}8\varepsilon_{cu}}{\omega_s d} \cdot (0{,}5d + 0{,}15l) = \frac{0{,}4\varepsilon_{cu}}{\omega_s} \cdot \left(1 + 0{,}3\frac{l}{d}\right) \tag{4.153}$$

Med antagande om att avslitning av armering är avgörande, dvs. $\omega_s < \omega_{s,krit}$, fås på samma sätt att rotationskapaciteten θ_f kan uttryckas som

$$\theta_f = \frac{a}{r} = \frac{0{,}5d + 0{,}15l}{r} = \frac{0{,}8\varepsilon_s}{d(0{,}8 - \omega_s)} \cdot (0{,}5d + 0{,}15l) = \frac{0{,}4\varepsilon_s}{0{,}8 - \omega_s} \cdot \left(1 + 0{,}3\frac{l}{d}\right) \tag{4.154}$$

För kontinuerliga balkar bestäms rotationskapaciteten i fältmitt som för en fritt upplagd balk ovan och rotationskapaciteten över stöd bestäms som en funktion av aktuella armeringsmängder. Det som skiljer beräkningen av rotationskapacitet över stöd från den i fältmitt är definitionen på flytledens utbredning. Över stöd används inte längre ekvation (4.143) för a utan denna definieras istället som

$$a = 0{,}5d + 0{,}1l_1 \tag{4.155}$$

där l_1 är balkens skjuvspännvidd, definierad som

$$l_1 = \frac{M_s}{V_s} \tag{4.156}$$

och M_s samt V_s är moment respektive tvärkraft vid stödet. För en balk med spännvidd l, belastad med en jämnt utbredd last q och momentkapacitet M_s i båda stöden samt M_f i fält gäller att

$$M_s + M_f = \frac{ql^2}{2} \tag{4.157}$$

samt att

$$V_s = \frac{ql}{2} \tag{4.158}$$

Momentkapaciteten M_s kan uttryckas som en funktion av M_f

$$M_s = \alpha M_f \tag{4.159}$$

där α är en parameter som är beroende av armeringsmängden ρ_s och ρ_f i stöd respektive fält och approximativt kan uttryckas som

$$\alpha = \frac{\rho_s}{\rho_f} \tag{4.160}$$

Kombineras ekvation (4.156) till (4.160) kan skjuvspännvidden l_1 skrivas om som

$$l_1 = \frac{\rho_s}{\rho_s + \rho_f} \cdot \frac{l}{4} \tag{4.161}$$

Rotationskapaciteten θ_s över stöd kan då skrivas som

$$\theta_s = \frac{a}{r} = \frac{0{,}1 \cdot \left(\frac{\rho_s}{\rho_s + \rho_f} \right) \cdot \frac{l}{4} + 0{,}5d}{r} = \frac{d}{2r} \cdot \left(1 + \frac{1}{20} \cdot \frac{\rho_s}{\rho_s + \rho_f} \cdot \frac{l}{d} \right) \tag{4.162}$$

Vid brott i betongen fås, med nyttjande av ekvation (4.145) och (4.149), att rotationskapaciteten blir

$$\theta_s = \frac{0{,}4\varepsilon_{cu}}{\omega_s} \cdot \left(1 + \frac{1}{20} \cdot \frac{\rho_s}{\rho_s + \rho_f} \cdot \frac{l}{d} \right) \tag{4.163}$$

och vid brott i armeringen fås på motsvarande sätt att

$$\theta_s = \frac{0{,}4\varepsilon_s}{0{,}8 - \omega_s} \cdot \left(1 + \frac{1}{20} \cdot \frac{\rho_s}{\rho_s + \rho_f} \cdot \frac{l}{d} \right) \tag{4.164}$$

I Bk 25:2 diskuteras inte om någon ökad rotationskapacitet på grund av byglar i fält. Ett avsnitt berör dock tillåten deformationsökning över stöd och där ges förslag på hur deformationen vid ett extremfall kan tillåtas fortsätta under förutsättningar att tryckarmeringen A_s' uppfyller kriteriet

$$A_s' \geq \frac{2}{3} A_s \tag{4.165}$$

vid stöd samt att $\rho_s \leq 0{,}5$ %. Tanken är att ökade deformationer i fält ska tillåtas även om tvärsnittet har gått till brott över stöd. Deformationen i detta extremfall tecknas då som

$$u = \frac{\rho_f}{\rho_s + \rho_f} \cdot u_f + \frac{\rho_s}{\rho_s + \rho_f} \cdot u_s \tag{4.166}$$

där u_f och u_s är tillåten mittdeformation med hänsyn till rotation θ_f och θ_s i fält- respektive stödsnitt enligt

$$u_f = \frac{\theta_f \cdot l}{2} \tag{4.167}$$

$$u_s = \frac{\theta_s \cdot l}{2} \tag{4.168}$$

vilket motsvarar den maximala deformationen för en fritt upplagd balk adderad med maximal deformation för en fast inspänd balk enligt ovan.

4.8.2.4 Eurokod 2

I Eurokod 2, CEN (2004), anges att plastisk analys, flytledsteori, kan användas utan särskild kontroll om nedanstående villkor uppfylls.

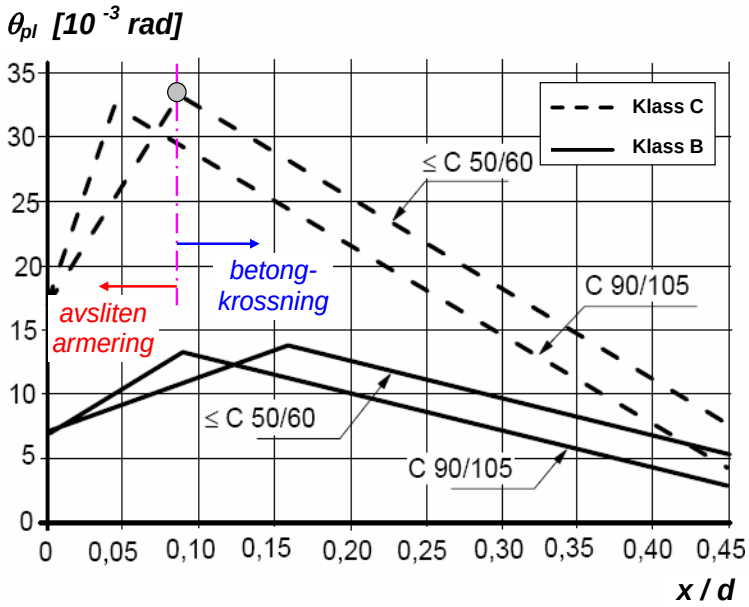
- Armeringsmängden begränsas så att $x / d \leq 0{,}25$ för betongklasser $\leq C50/60$ samt $x / d \leq 0{,}15$ för betongklasser $\geq C55/67$.
- Nyttjad armering är av klass *B* eller *C*, se Tabell 4.6.
- Kvoten för moment M_s i stöd och moment M_f i fält uppfyller villkoret att $0{,}5 \leq M_s / M_f \leq 2{,}0$.

Tabell 4.6 Definition av armeringsklasser enligt Eurokod 2, CEN (2004).

Klass	f_{yk} [MPa]	f_{su} / f_{sy} [-]	$\varepsilon_{s,fsu}$ [%]
A	400 - 600	≥1,05	≥ 2,5
B	400 - 600	≥ 1,08	≥ 5,0
C	400 - 600	≥ 1,15 < 1,35	≥ 7,5

Det framgår inte klart av Eurokod 2 men det är rimligt att tro att dessa anvisningar syftar på den plastiska deformationsförmåga som behövs för att utnyttja flytledsteori vid normal statisk belastning. För en impulsbelastad konstruktion kan dock erforderlig rotationskapacitet bli betydligt högre än så varför ovan givna villkor inte bedöms vara tillämpbara i ett sådant fall.

I Eurokod 2 ges dock även ytterligare information om tillåten plastisk rotationskapacitet via ett diagram bestående av fyra olika samband, se Figur 4.25. Här återges tillåten rotationskapacitet beroende på betongkvalitet och armeringsklass och är också det samband som används i detta avsnitt.



Figur 4.25 Diagram för bestämning av tillåten plastisk rotationskapacitet θ_{pl} för olika typer av betong och armering. Gräns för brottorsak är markerad. Baserad på Eurokod 2, CEN (2004).

Redovisade samband i Figur 4.25 gäller för balktvärsnitt med skjuvslankheten $\lambda = 3{,}0$. För andra värden på λ ska rotationskapaciteten multipliceras med en faktor

$$k_\lambda = \sqrt{\frac{\lambda}{3}} \tag{4.169}$$

där λ definieras som

$$\lambda = \frac{l_0}{d} \tag{4.170}$$

varvid l_0 är avståndet mellan momentnollpunkt och flytled enligt Figur 4.22 och d är den effektiva höjden. De restriktioner som anges för att använda samband redovisade i Figur 4.25 är för betong *C50/60* att

$$\frac{x}{d} \leq 0{,}45 \tag{4.171}$$

samt för betong *C55/67* att

$$\frac{x}{d} \leq 0{,}35 \tag{4.172}$$

För att räkna med rotationskapacitet i konstruktionen ska armering av klass B eller C, med definition enligt Tabell 4.6, användas. Armering av klass A är inte tillämpligt för plastiska omlagringar.

Som framgår av Figur 4.25 används i Eurokod 2 kvoten x / d för att beskriva tvärsnittets egenskaper medan det för Betonghandboken och Bk 25, i avsnitt 4.8.2.2 respektive 4.8.2.3, används mekanisk armeringskvoten ω_s för motsvarande sak. Med nyttjande av ekvation (4.149) kan kvoten x / d dock kopplas med ω_s som

$$\frac{x}{d} = \frac{\omega_s}{0{,}8} \tag{4.173}$$

Bakgrunden till de i Eurokod 2 presenterade rotationskapaciteterna framgår inte av denna. Det är därför inte möjligt att, på ett sätt motsvarande Betonghandboken eller BK 25 i avsnitt 4.8.2.2 respektive 4.8.2.3, se vilka parametrar som är beaktade i Figur 4.25 angivna samband. För att få en djupare förståelse för hur dessa samband tagits fram måste aktuellt bakgrundsmaterial studeras, något som inte inryms i här utfört arbete.

4.8.2.5 Räddningsverket raslaster

Enligt Räddningsverkets skyddsrumsregler SR 06, Räddningsverket (2006), ska ett skyddsrum klara att motstå impulsbelastning från explosionslast samt raslast från ovanliggande byggnad. Vid dimensionering av skyddsrummet mot dessa yttre hot används dock inte impulslaster utan Räddningsverket har istället valt att använda sig av ekvivalenta statiska laster.

För dimensionering anges nedre och övre gränsvärden för tillåtna armeringsmängder, krav på mekaniska egenskaper hos nyttjad armering samt tillåtna kvoter för momentkapacitet i stöd och fält. Bakom dessa anvisningar finns givna förutsättningar som påverkat storleken på angivna ekvivalenta statiska laster. Vilka dessa förutsättningar är redovisas dock inte i SR 06 och några explicita anvisningar om tillåten deformationskapacitet hos i skyddsrum ingående konstruktionsdelar ges inte heller. Det i SR 06 använda uttrycket för att ekvivalent statisk last av raslast från omkringliggande byggnader finns dock härlett i Hallgren och Granström (1977) och finns även närmare studerat i Johansson (1999). Hallgren och Granström (1977) resonerar kring olika kriterier för tillåten deformation hos utsatt takplatta varvid slutligen väljs att använda

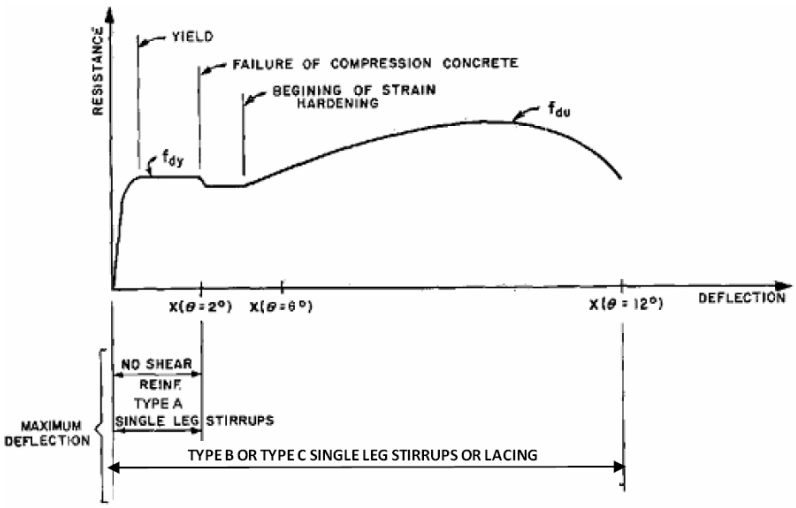
$$u = \frac{l}{10} \tag{4.174}$$

där u är maximal förskjutning i takplattan och l är takplattans kortaste spännvidd. Vid jämförelse av här övriga redovisade uttryck, se avsnitt 4.8.3, framgår det att detta samband anger en stor deformationsförmåga hos utsatt konstruktionsdel. I detta uttryck finns dock även beaktat gynnsamma effekter av såkallad linverkan, vilket förklarar det höga värdet på tillåten deformationsförmåga.

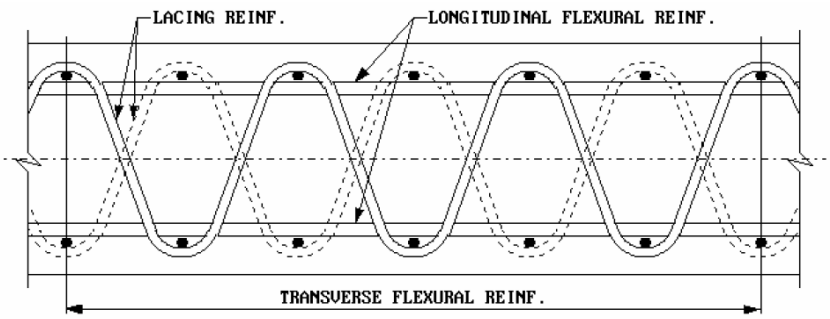
4.8.2.6 Amerikanska försvarets standard för explosion vid olyckor

De i detta avsnitt givna anvisningar är hämtade ur UFC 3-340-02, DDESB (2008), vilket är framtaget av USA:s försvarsdepartement för dimensionering och analys av konstruktioner utsatta för explosioner vid olyckor. Innehållet i denna rapport är baserat på dokument inom USA:s försvar – arméns TM 5-1300, flottans NAVFAC P-397 samt flygvapnets AFR 88-22 – och har i och med detta också helt ersatt dessa.

I DDESB (2008) ges endast mycket övergripande anvisningar för vilken deformationsförmåga som en impulsbelastad betongkonstruktion kan förväntas uppvisa. Det anges visserligen att den maximala deformationen är en funktion av konstruktionens spännvidd, höjd samt typ, mängd och konfiguration av armering men några djupare riktlinjer än så ges inte. Givna anvisningar baseras istället på ett schematiskt last-deformationssamband för en armerad betongbalk, se Figur 4.26. Här illustreras principiellt uppförande hos en betongbalk där responsen beror på närvaron av samt typen av byglar. Sammanfattningsvis förs ett resonemang som innebär att betongen krossas vid en rotation $\theta = 2°$. Saknas det byglar och tryckarmering i utsatt tvärsnitt innebär detta att brott erhålls. Är balken dock försedd med dessa – byglarna förhindrar att tryckarmeringen bucklar, jämför krav om byglar i avsnitt 4.8.2.2 – bedöms tryckarmeringen överta delar av betongens funktion varvid brott fördröjs. Kapaciteten sjunker visserligen något på grund av minskad inre hävarm men tillåten rotationskapacitet bedöms öka till $\theta = 6°$. Därefter anses tvärsnittet kollapsa om inte en för ändamålet särskild utvecklad typ av bygelarmering används, se Figur 4.27, varvid tillåten rotationskapacitet ökar ytterligare till $\theta = 12°$.



Figur 4.26 Schematiskt last-deformationssamband för armerad betongbalk. Från DDESB (2008).



Figur 4.27 Särskilt utformad bygelarmering (lacing reinforcement) för att öka deformationsförmågan hos en armerad betongkonstruktion. Från DDESB (2008).

De ovan givna rekommendationerna på tillåtna rotationer är mycket grova och bör snarast betraktas som schablonvärden på tillåtna rotationer. Sammanfattningsvis fås av detta rotationskapaciteter och förhållande spännvidd/deformation, l/u, enligt Tabell 4.7. Av detta framgår att tillåtna deformationer, jämfört med vad som fås enligt metoder i avsnitt 4.8.2.2 till 4.8.2.4, är givmilda.

Tabell 4.7 Tillåten rotationskapacitet θ och förhållande spännvidd/deformation l/u enligt DDESB (2008).

Typ av bygelarmering	θ [°]	θ [10^{-3} rad]	l/u [-]
Ingen	2	35	57
Normal	6	105	19
Enligt Figur 4.27	12	210	10

Materialegenskaperna hos den armering som anges i DDESB (2008) listas i Tabell 4.8 och av detta framgår att de besitter goda seghetsegenskaper, ungefär motsvarande armering av klass C i Eurokod 2, se Tabell 4.6.

Tabell 4.8 Definition av armeringsklasser enligt Eurokod 2, CEN (2004).

Armeringstyp	f_{sy} [MPa]	f_{su} [MPa]	$\gamma = f_{su} / f_{sy}$ [-]
ASTM A 615 Grade 60	455	620	1,36
ASTM A 706 Grade 60	455	550	1,21

4.8.3 Jämförelse av beräkningsmetoder

4.8.3.1 Orientering

I föregående avsnitt presenteras metod från olika källor för att bedöma tillåten rotationskapacitet hos en armerad betongkonstruktion. För att ge en övergripande bild av hur dessa metoder förhåller sig till varandra jämförs resulterande rotationskapacitet från avsnitt 4.8.2.2 till 4.8.2.4, dvs. enligt Betonghandboken, Bk 25 respektive Eurokod 2. Sambanden givna i avsnitt 4.8.2.5 och 4.8.2.6, Räddningsverkets raslaster samt Amerikansk militärstandard, utgår från denna jämförelse eftersom de bedöms vara såpass schabloniserade.

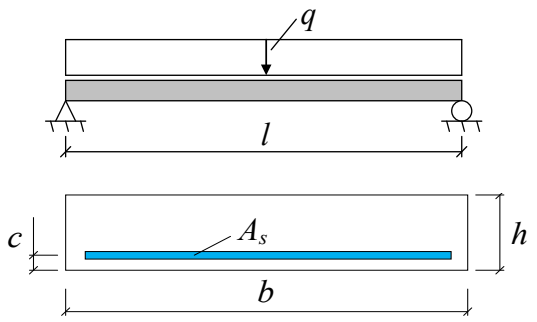
Nedan redovisade diagram är baserade på en fritt upplagd balk utsatt för en jämnt utbredd last. Som mått på tillåten rotationskapacitet används kvoten l / u, dvs. spännvidd genom förskjutning, där kopplingen till rotationen θ kan skrivas som

$$\theta = \frac{2u}{l} \tag{4.175}$$

Ett lågt värde på kvoten l / u innebär en hög, och därmed bra, rotationskapacitet. Som mått på balkens armeringsmängd används det av Eurokod 2 använda kvoten x / d, tryckzonshöjd / effektiv höjd, där denna förhåller sig till den mekaniska armeringskvoten ω_s som

$$\omega_s = \frac{0{,}8x}{d} \tag{4.176}$$

Inverkan av eventuell tryckarmering bortses från vid beräkning av kvoten x / d. Beroende på vilken parameter som varieras fås olika utseende i de olika beräkningsmodellerna. För att få en tillräcklig överblick varieras därför höjden h, armeringsmängden A_s samt balkens spännvidd l, se Figur 4.28.



l = 3,0 m (eller 6,0 m)

b = 1000 mm c = 40 mm

h = 350 mm (eller varierande)

$d = h - c$

A_s = ϕ16 s200 (eller varierande)

f_{cc} = 24 MPa f_{st} = 500 MPa

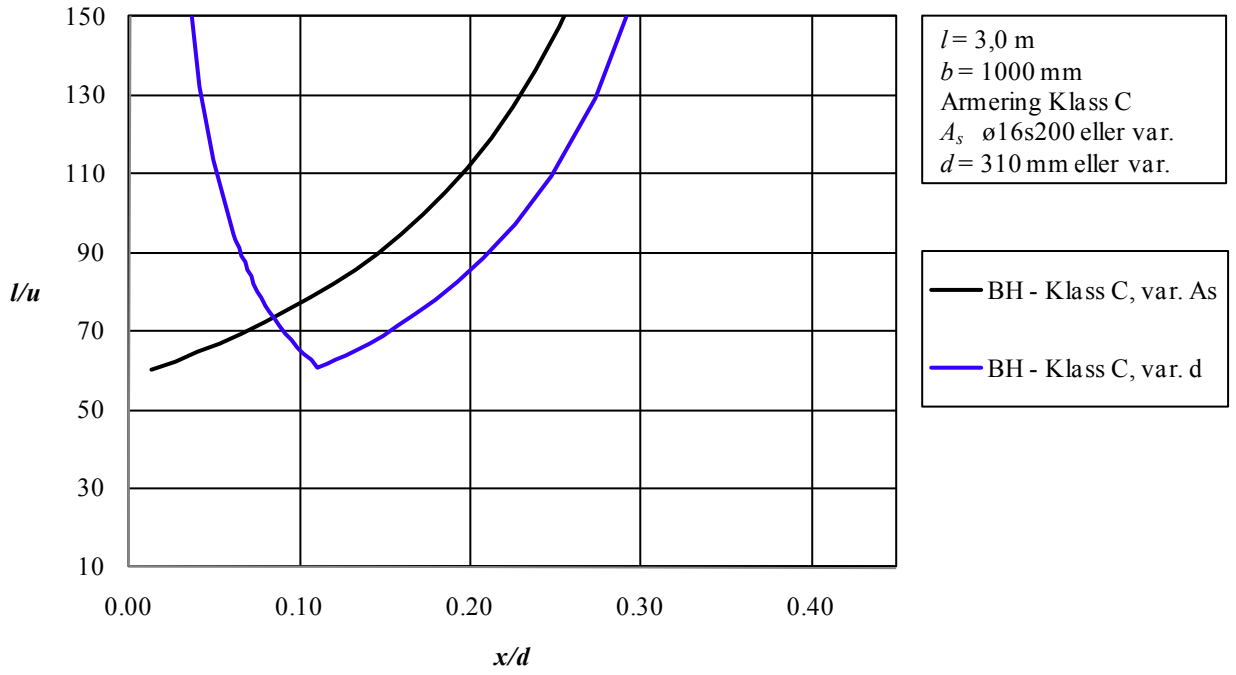
Figur 4.28 Dimensioner och materialegenskaper hos studerad balk.

De armeringstyper som anges i Betonghandboken, se Tabell 4.5, användes i Sverige fram till mitten av 1990-talet. Hur en översättning till idag använda armeringstyper, se Tabell 4.6, ska göras är inte självklar. Översiktligt kan dock en tolkning[4] göras enligt Tabell 4.9.

Tabell 4.9 Tolkning av dagens armeringstyper, enligt Tabell 4.6 i avsnitt 4.8.2.4, till de kategorier som ges i Betonghandboken, Tabell 4.5 i avsnitt 4.8.2.2.

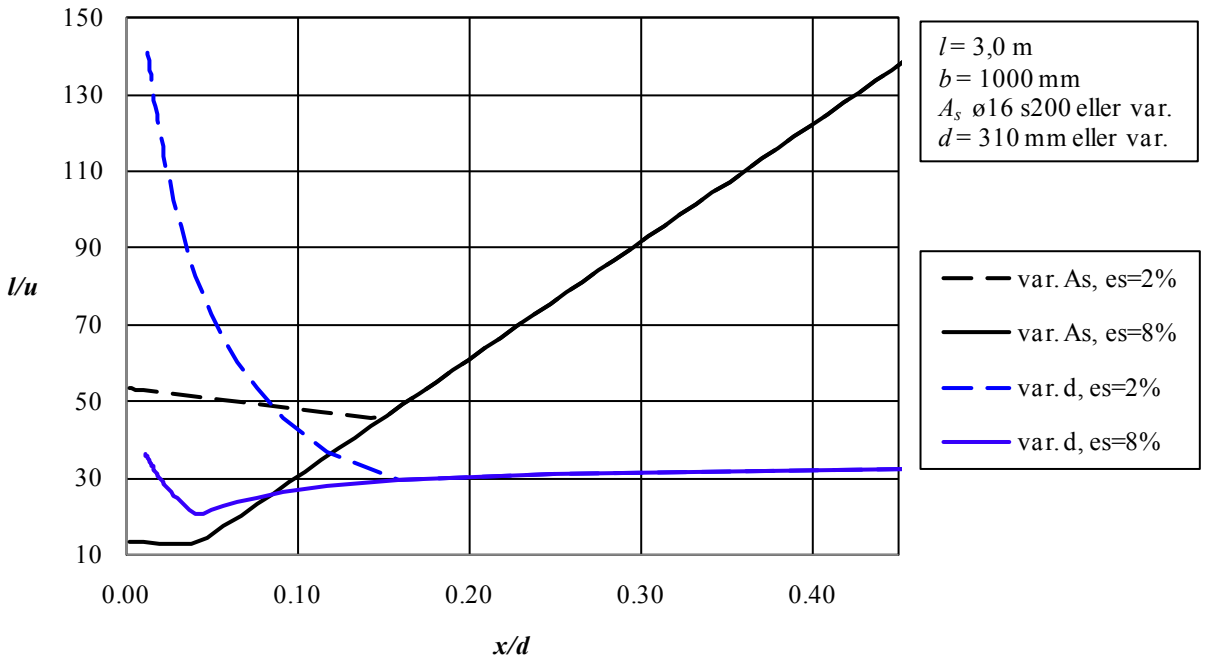
Armeringstyp enligt Betonghandboken	Armeringstyp enligt Eurokod 2
Ks 60, Ks 40, Ss 26, Ss 26S	Klass C
Ks 60S, Ks 40S [1)]	Klass B
Kallbearbetat stål med $\varepsilon_{su} \geq 3$ % och $f_{su} / f_{sy(0,2)} \geq 1{,}1$	Klass A

I Figur 4.29 till Figur 4.31 illustreras tillåten rotationskapacitet enligt Betonghandboken, Bk 25 samt Eurokod 2 för balk illustrerad i Figur 4.28. Kvoten x / d varieras via armeringsmängden A_s eller effektiva höjden d. I Bk 25:1 har utgåtts från en tillåten medeltöjning $\varepsilon_s = 8$ %. Utgående från de armeringsegenskaper som dagens armering har – Klass C har ett krav på $\varepsilon_{su} \geq 7{,}5$ % – är detta värde dock orimligt högt. Därför har i utförda jämförelser även ett betydligt mer konservativt värde på medeltöjningen, $\varepsilon_s = 2$ %, använts.

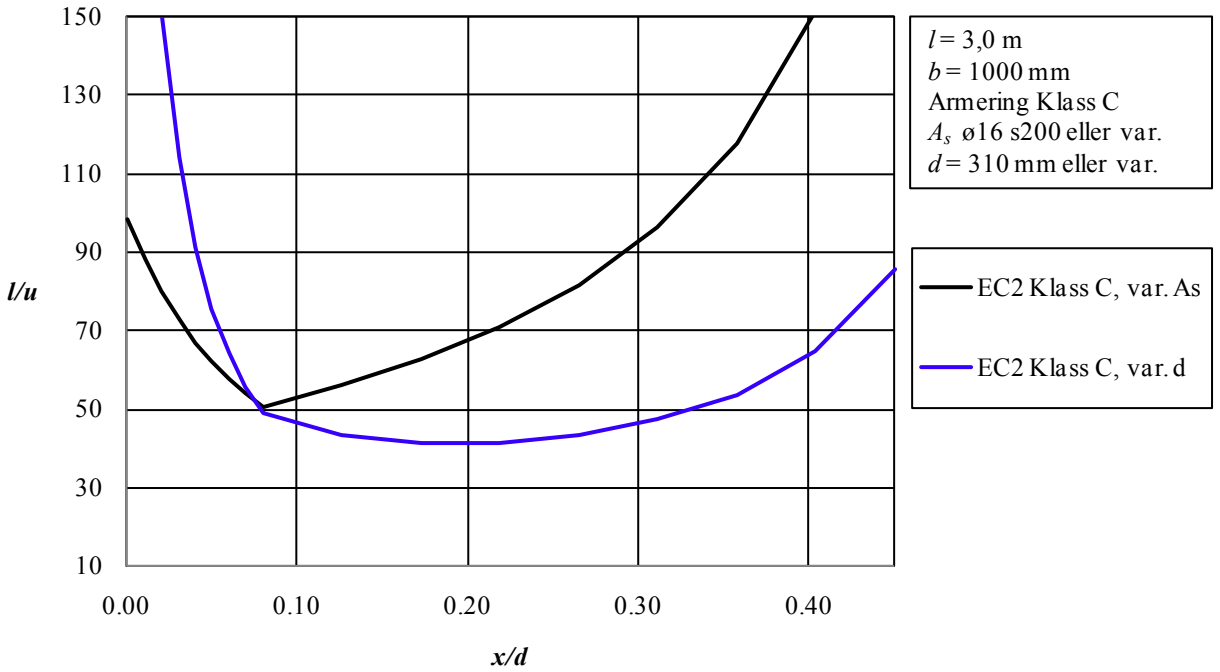


Figur 4.29 Tillåten rotationskapacitet enligt Betonghandboken för balk i Figur 4.28, där kvoten x / d varierar via armeringsmängden A_s eller effektiva höjden d.

[4] Denna tolkning är på gränsen till välvillig mot den i dag använda armeringen och eventuellt borde armering av Klass C egentligen likställas med armeringstyp Ks 60S och Ks 40 S, se Johansson (1997).

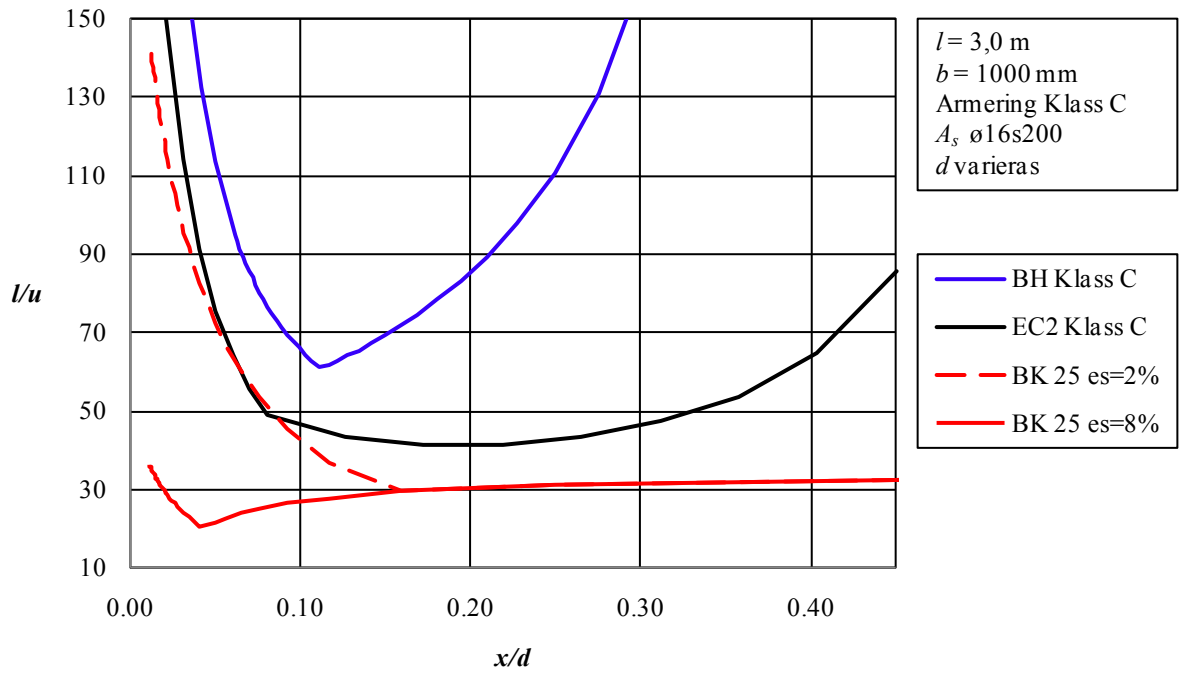


Figur 4.30 Tillåten rotationskapacitet enligt Bk 25 för balk i Figur 4.28, där kvoten x / d varierar via armeringsmängden A_s eller effektiva höjden d.

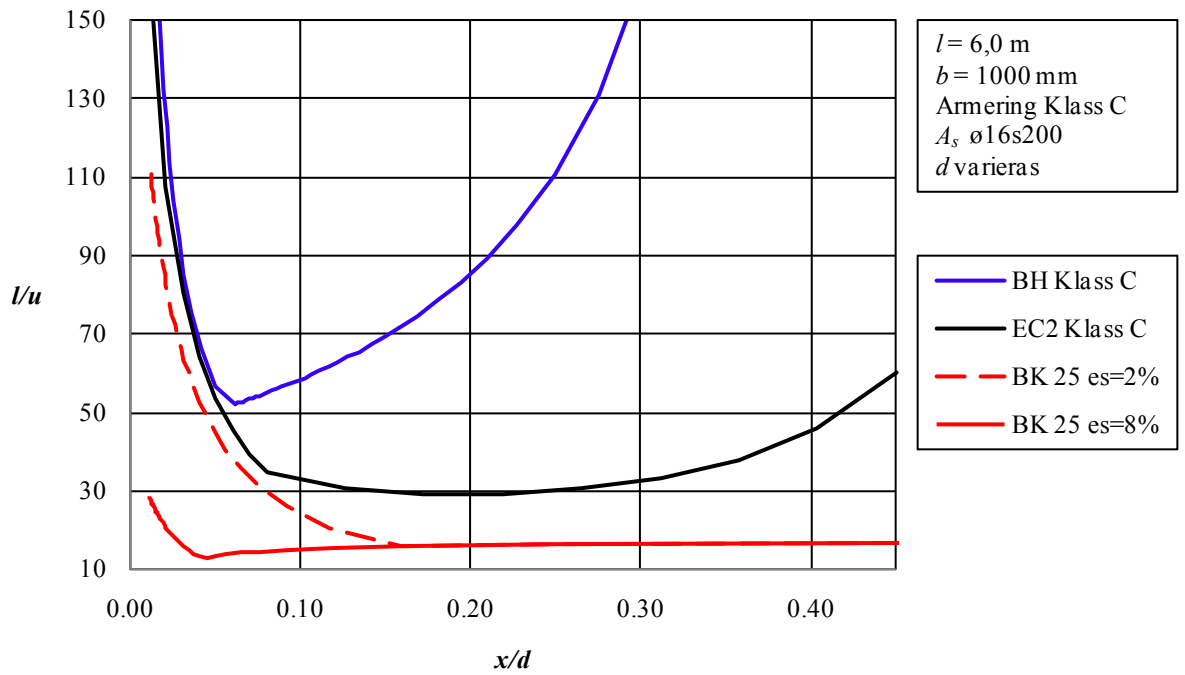


Figur 4.31 Tillåten rotationskapacitet enligt Eurokod 2 för balk i Figur 4.28, där kvoten x / d varierar via armeringsmängden A_s eller effektiva höjden d.

Av detta framgår att rotationskapaciteten l / u, vid en ökad kvot x / d, blir bättre vid variation av d jämfört med variation av A_s. På samma sätt fås en bättre rotationskapacitet vid låga värden på kvoten x / d vid variation av A_s istället för d. Gränsen för detta är kopplat till aktuellt brottkriterium, dvs. om rotationskapaciteten begränsas av avsliten armering eller krossning av betongen.



Figur 4.32 Jämförelse av tillåten rotationskapacitet enligt Betonghandboken, Bk 25 och Eurokod 2 för balk i Figur 4.28 där kvoten x / d varieras med effektiva höjden d.



Figur 4.33 Jämförelse av tillåten rotationskapacitet enligt Betonghandboken, Bk 25 och Eurokod 2 för balk i Figur 4.28, där kvoten x / d varieras med effektiva höjden d. Balkens spännvidd har ökats till l = 6,0 m.

I Figur 4.32 görs en sammanställning av resulterande rotationskapacitet l / u när kvoten x / d varierar via den effektiva höjden d. Av denna framgår att störst rotationskapacitet (lågt värde på kvoten l / u) predikteras av Bk 25 medan Betonghandboken predikterar lägst kapacitet. I Figur 4.33 visas motsvarande samband men för balk med dubbel balklängd, $l = 6{,}0$ m, och av detta framgår att en ökad balklängd resulterar i ökad rotationskapacitet.

4.8.4 Jämförelser med försöksdata

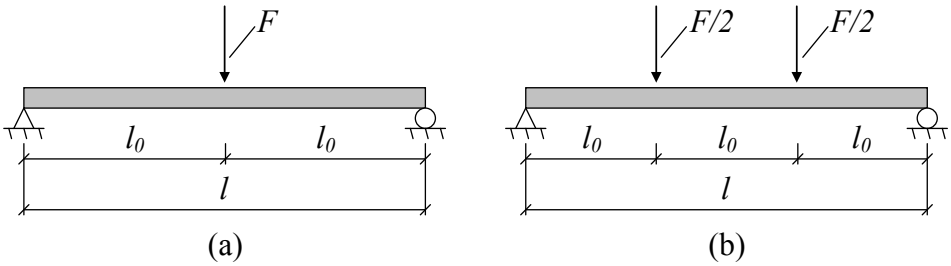
4.8.4.1 Orientering

Här utförd jämförelse gör inte anspråk på att vara fullständig utan ska främst ses som en indikation på hur väl samband redovisade i avsnitt 4.8.2.2 till 4.8.2.4 stämmer överens med försök utförda med den typ av armering som används i Sverige idag. En övergripande jämförelse görs baserat på försök utförda på Chalmers tekniska högskola (Chalmers) under 1990-talet samt försök utförda på Kungliga tekniska högskolan (KTH) under 2000-talet. Mer försöksmaterial finns att tillgå i litteraturen men en genomgång och analys av dessa ryms inte inom här utfört arbete, varför en sådan mer genomgående kontroll hänskjuts till eventuellt framtida arbete.

Det uttryck som presenteras i Betonghandboken, avsnitt 4.8.2.2, är resultatet av ett omfattande arbete som utfördes på Chalmers under framförallt mitten av 1970-talet, se Cederwall *et al.* (1974) och Öberg (1976). I där utförda försök användes främst armering av typen Ks 40 och Ks 60. Under mitten av 1990-talet infördes en ny armeringstyp i Sverige, Ks 500, vilken uppvisade försämrade seghetsegenskaper jämfört med sina föregångare, se Johansson (1997). Detta observerades vid försök på impulsbelastade betongplattor vid försök på FOA i slutet av 1990-talet.

En begränsad studie av vilken inverkan den nya armeringen har på en betongbalks rotations-kapacitet gjordes på Chalmers av An och Cederwall (1995). Av försök utförda på Chalmers har även ett sådant från Grassl (1999), ingående i en studie för Räddningsverket, medtagits i jämförelsen. Under perioden 2000-2005 utfördes även en omfattande försöksserie på KTH, på uppdrag av Svenska Försvarsmakten, innefattande statiska och dynamiska försök på armerade betongplattstrimlor. Arbetet resulterade i sju rapporter, fyra stycken behandlande fritt upplagda plattstrimlor och tre stycken om kontinuerliga plattstrimlor, Ansell och Svedbjörk (2000, 2001a, 2001b, 2003a, 2003b, 2005). Syftet med ovanstående försöksserier var att jämföra rotationskapaci-teten hos betongkonstruktioner utförda med den nya armeringen av typ Ks 500 jämfört med tidigare använd armeringstyp. Valda delar av dessa undersökningar presenteras här för jämförelse med de beräkningsmodeller som presenteras i avsnitt 4.8.2.2 till 4.8.2.4.

Principiell lastuppställning i undersökta försök illustreras i Figur 4.34 och från detta framgår att denna har varit med en eller två punktlaster.



Figur 4.34 Principiell lastuppställning för här undersökta försök utförda på (a) Chalmers och (b) KTH.

Vid bedömning av tillgänglig rotationskapacitet från försök har ett synsätt motsvarande det som illustreras i Figur 4.35 använts. Detta innebär att den plastiska deformationen u_{pl} definierats som

$$u_{pl} = u_u - u_{el} \tag{4.177}$$

där u_u representerar balkens totala deformation vid en last $0{,}95 \cdot F_{max}$ och u_{el} anger den elastiska deformationen vid samma lastnivå. Ur detta kan sedan rotationskapaciteten beräknas som

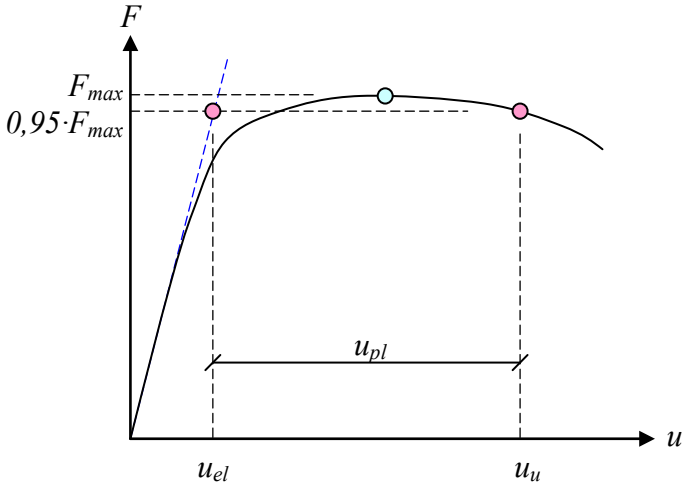
$$\theta = \frac{u_{pl}}{l_0} \tag{4.178}$$

där l_0 är avstånd mellan momentnollpunkt och flytled. För balkar provade på Chalmers fås då, med utgångspunkt från Figur 4.34 att

$$\theta = \frac{2 \cdot u_{pl}}{l} \tag{4.179}$$

och för balkar provade på KTH fås att (4.180)

$$\theta = \frac{3 \cdot u_{pl}}{l} \tag{4.181}$$

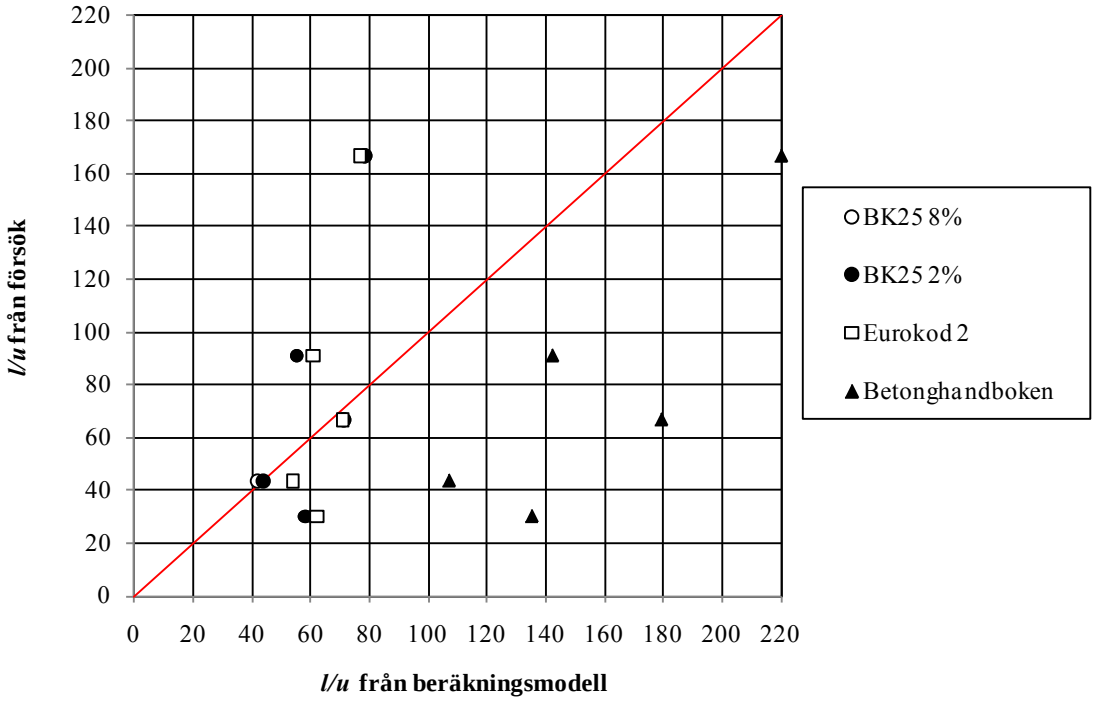


Figur 4.35 Parametrar vid bestämning av rotationskapacitet ur last-deformationssamband.

Givna uttryck i Bk 25 är begränsade till att gälla för en jämnt utbredd last. I här utförda beräkningar har dock flytledens utbredning *a* ändå antagits motsvara den för en jämnt utbredd last. För rotationskapaciteterna uträknade med Eurokod 2 är inte hänsyn tagen till någon variation i betongkvalitet, samband för C 50/60 har använts för samtliga balkar.

4.8.4.2 Försök utförda på Chalmers

Försöksresultat består av fyra balkar från An och Cederwall (1995) samt en balk från Grassl (1999). I den förstnämnda studien utfördes tre balkar med den nya armeringstypen Ks 500 och en balk med den äldre typen Ks 60. Armeringens mekaniska egenskaper var, ur seghetssynpunkt, likvärdiga för båda armeringstyperna. Dvs. det kunde konstateras att seghetsegenskaperna för armering Ks 60 från mitten av 1990-talet hade försämrats betänkligt jämfört mot armering med samma beteckning, något som stämmer bra överens med observationer gjorda i Johansson (1997). Jämförelse mellan erhållna och predikterad rotationskapacitet *l* / *u* ges i Figur 4.36 och Tabell 4.10.



Figur 4.36 Jämförelse mellan beräknad rotationskapacitet u /l och försök för balkar provade på Chalmers. För utförda försök är kvoten 0,14 ≤ x / d ≤ 0,27.

Tabell 4.10 Sammanställning av provade balkar på Chalmers samt resulterande rotationskapacitet l / u enligt olika beräkningsmodeller.

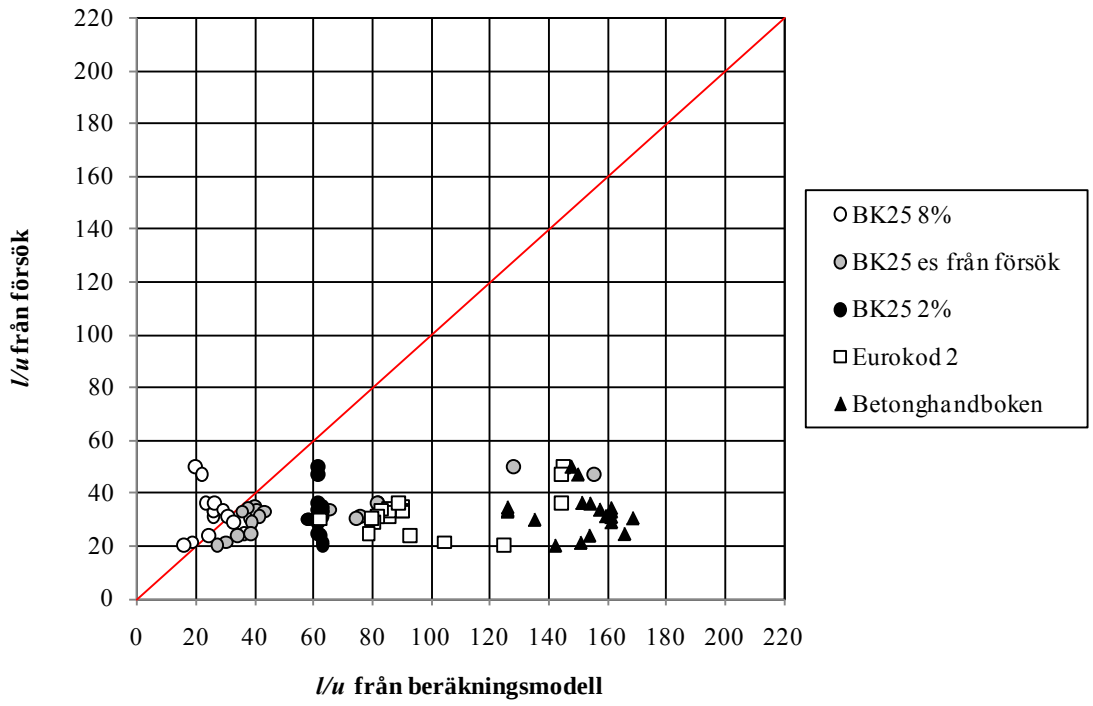
															l/u					
Referens [1)]	Namn	l [mm]	b [mm]	h [mm]	d [mm]	A_s [mm²]	f_{cc} [MPa]	f_{sy} [MPa]	f_{su} [MPa]	γ [-]	ω_s [-]	x/d [-]	u_{pl} [mm]	ε_s [%]	Test [-]	BH [-]	Bk 25 [-] [2)]	Bk 25 [-] [3)]	Bk 25 [-] [4)]	EC2 [-]
(1995) [1a)]	LB1	4 800	200	500	464	678	30,3	537	630	1,17	0,115	0,143	110	-	43	107	44	42	-	54
	LB3	4 800	200	500	455	1 206	30,3	565	648	1,15	0,219	0,274	29	-	167	220	78	78	-	77
	LB5	4 800	200	500	464	678	26,1	652	751	1,15	0,152	0,190	53	-	91	142	55	55	-	61
	LB7	4 800	200	300	264	678	27,8	537	630	1,17	0,210	0,262	72	-	67	179	71	71	-	71
(1999) [1b)]	RV15	3 000	600	300	268	1 407	28	543	-	-	0,170	0,212	100	-	30	135	58	58	-	62

[1a)] An och Cederwall (1995) [1b)] Grassl (1999) [2)] Bk 25 – 2 % [3)] Bk 25 – 8 % [4)] Bk 25 - ε_s

4.8.4.3 Försök utförda på KTH

Den totala försöksserien omfattar 48 stycken fritt upplagda och 24 stycken kontinuerliga plattstrimlor. I de olika rapporterna varieras armeringstyp och dimension, betongkvalitet och bredd på tvärsnittet. Samtliga plattstrimlor hade en spännvidd $l = 1{,}5$ m i studerat spann, var armerade med samma armeringsmängd i över och underkant samt belastades med två punktlaster i tredjedelspunkterna. Plattstrimlorna belastades med statisk eller dynamisk last där resulterande töjningar på armeringsstängerna bestämdes i intervaller om 50 mm över hela stångens längd. Här redovisade resultat begränsas till fritt upplagda, statiskt belastade plattstrimlor där använd armering av typ B500BT, uppvisande en arbetskurva motsvarande den som illustreras i Figur 3.17. Försöksbalkar med uppenbart underligt beteende på grund av olyckligt utformat tvärsnitt bortsets från, vilket gör att här redovisade plattstrimlor begränsas till 22 stycken. Jämförelse mellan erhållna och predikterad rotationskapacitet l / u ges i Figur 4.37 och Tabell 4.11.

Flera av försöken har avslutats innan brott har uppnåtts. Det deformationsvärde som har kunnat utläsas från rapporter är därför också i de flesta fall lägre än den deformation u_u som illustreras i Figur 4.35. Dvs. här redovisade värden från försöken underskattar rotationskapaciteten något. I uttrycket för Bk 25 spelar värdet på ståltöjningen stor roll. I utförd jämförelse har $\varepsilon_s = 8$ % respektive $\varepsilon_s = 2$ använts. För att få en så realistisk bild som möjligt av de provade plattstrimlorna har även den uppmätta medeltöjningen mellan lastpunkterna använts som värde på töjningen ε_s. Det kan även poängteras att Bk 25 för dessa fall predikterar avsliten armering som brottkriterium medan försöken i regel avslutades på grund av brott i betongen. Erhållna resultatvärden, men inte brottyp, från modellen överensstämmer således relativt bra med försöken.



Figur 4.37 Jämförelse mellan beräknad rotationskapacitet l / u och försök för balkar provade på Chalmers. För utförda försök är kvoten $0{,}02 \leq x / d \leq 0{,}09$.

Tabell 4.11 Sammanställning av provade balkar på KTH samt resulterande rotationskapacitet l / u enligt olika beräkningsmodeller.

															l/u					
Referens [1]	Namn	l	b	h	d	A_s	f_{cc}	f_{sy}	f_{su}	γ	ω_s	x/d	u_{pl}	ε_s	Test	BH	Bk 25	Bk 25	Bk 25	EC2
		[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm^2]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[-]	[-]	[-]	[mm]	[%]	[-]	[-]	[-] [2]	[-] [3]	[-] [4]	[-]
(2000)	PLS 1	1 500	300	150	126	101	28,1	500	575	1,15	0,047	0,059	43,3	3,2	35	126	63	26	40	90
	PLS 2	1 500	300	150	126	101	28,1	500	575	1,15	0,047	0,059	44,8	3,2	34	126	63	26	41	90
	PLS 3	1 500	300	150	126	101	28,1	500	575	1,15	0,047	0,059	45,3	3,0	33	126	63	26	43	90
	PLS 4	1 500	300	150	126	101	28,1	570	660	1,16	0,054	0,067	48,3	3,1	31	161	63	26	41	86
	PLS 5	1 500	300	150	126	101	28,1	570	660	1,16	0,054	0,067	43,7	3,4	34	161	63	26	38	86
	PLS 6	1 500	300	150	126	101	28,1	570	660	1,16	0,054	0,067	45,4	3,6	33	161	63	26	36	86
(2003a)	PLS 2	1 500	300	150	124	113	35,1	516	624	1,21	0,045	0,056	62,5	3,7	24	154	62	24	34	93
	PLS 3	1 500	300	150	126	101	39,9	514	653	1,27	0,034	0,043	70,4	4,4	21	151	63	19	30	105
	PLS 4	1 500	300	150	126	101	83,6	514	653	1,27	0,016	0,020	74,2	5,0	20	142	63	16	27	124
(2005)	PLS 1a	1 500	530	150	122	201	45,0	534	643	1,20	0,037	0,046	30,0	1,0	50	148	62	20	128	145
	PLS 1b	1 500	530	150	122	201	40,3	534	643	1,20	0,041	0,052	31,9	0,8	47	150	62	22	155	144
	PLS 1c	1 500	530	150	122	201	37,9	534	643	1,20	0,044	0,055	41,3	1,6	36	151	62	23	82	144
	PLS 3a	1 500	400	150	122	201	45,0	534	643	1,20	0,049	0,061	41,6	1,5	36	154	62	26	81	89
	PLS 3b	1 500	400	150	122	201	40,3	534	643	1,20	0,055	0,068	44,4	1,9	34	157	62	29	65	83
	PLS 3c	1 500	400	150	122	201	37,9	534	643	1,20	0,058	0,073	47,8	1,6	31	159	62	31	76	82
	PLS 4a	1 500	320	150	122	201	45,0	534	643	1,20	0,061	0,076	51,6	3,2	29	161	62	33	39	80
	PLS 4b	1 500	320	150	122	201	40,3	534	643	1,20	0,068	0,085	60,9	3,2	25	166	62	36	39	79
	PLS 4c	1 500	320	150	122	201	37,9	534	643	1,20	0,073	0,091	49,1	1,6	31	168	62	39	74	80

[1] Ansell och Svedbjörk [2] Bk 25 – 2 % [3] Bk 25 – 8 % [4] Bk 25 - ε_s

4.8.5 Kommentar om predikterad rotationskapacitet

Tillräcklig deformationsförmåga hos en armerad betongkonstruktion är i mångt och mycket avgörande för dess förmåga att motstå påfrestningarna från en impulslast. Deformationsförmåga kan i det här sammanhanget likställas med rotationskapacitet och förmågan att med tillförlitliga verktyg göra en rimlig uppskattning av tillåten sådan är mycket viktigt. Här undersökta anvisningar pekar dock på att det råder en stor spridning i predikterad tillåten rotationskapacitet. Orsaken till detta är inte klarlagd men det kan inte desto mindre konstateras att det är olyckligt att så är fallet.

De i avsnitt 4.8.2.5 och 4.8.2.6 angivna rotationskapaciteterna bör ses som schablonvärden och endast användas med stor försiktighet. Utgående från jämförelser i avsnitt 4.8.3 kan det även konkluderas att uttryck enligt Betonghandboken i många fall predikterar en betydligt lägre rotationskapacitet än vad som görs för motsvarande fall i Bk 25 eller Eurokod 2. Utgående från jämförelse med försöksresultat i avsnitt 4.8.4 framgår också att Betonghandboken i flera fall med liten armeringsmängd, se Figur 4.37, grovt underskattar den rotationskapacitet som observerats i försök. Så är i princip även fallet för Eurokod 2, även om denna klarar sig något bättre, medan Bk 25, vid antagande om $\varepsilon_s = 8$ %, rent av överskattar tillgänglig rotationskapacitet. Med ett mer konservativt antagande, $\varepsilon_s = 2$ %, predikterar dock Bk 25 fortfarande rotationskapacitet på säker sida jämfört med försök men med bättre överensstämmelse än både Betonghandboken och Eurokod 2. Det ska även poängteras att för höga armeringsmängder, se Figur 4.36, överskattar både Bk 25 och Eurokod 2 tillgänglig rotationskapacitet jämfört med försök medan Betonghandboken fortfarande hamnar på säker sida.

Den jämförelsen mellan försök och beräkningsmetod som har gjorts antyder att de senare underskattar rotationskapaciteten vid låga armeringsmängder, när brottkriterium utgörs av avsliten armering, men riskerar att överskatta den vid höga armeringsmängder där betongkrossning utgör brottkriterium.

Vid jämförelse av betongbalkar med höga armeringsmängder och låga predikterade rotations-kapaciteter, ger teoretiska modeller genomgående mycket bättre överensstämmelse än vad som är fallet med försök med låga armeringsmängder. Om detta beror på lastuppställning (en kontra två punktlaster) eller på aktuell mekanisk armeringskvot (Chalmers – hög, KTH – låg) är oklart. Det är farligt att dra alltför omfattande slutsatser utgående från denna begränsade observationsmängd och behov finns av en mer utförlig studie inom detta område innan en tillförlitlig rekommendation kan ges.

Tillsvidare synes dock uttryck enligt Eurokod 2 vara rimligt att använda. Detta eftersom Eurokod 2, till skillnad mot övriga beräkningsmetoder, verkligen är framtaget för just den typ av armering – klass B och C – som finns att tillgå idag och dels för att där föreslagna samband baserats på en stor mängd försöksresultat. Den betydande avvikelse som observeras mellan Eurokod 2 och KTH-försök utgör dock skäl nog till en önskan att kunna använda den ytterligare kapacitet som antyds i denna jämförelse. Utgående från här presenterade jämförelser synes därför Bk 25, med antagande om ε_s = 2 %, vara ett acceptabelt alternativ till Eurokod 2.

4.9 Resthållfasthet

4.9.1 Orientering

Vid dimensionering eller analys av en konstruktion utsatt för en impulslast kontrolleras det vilka påkänningar som uppstår och påvisas det att bärförmågan är tillräcklig är man normalt nöjd med detta. Det kan dock finnas tillfällen då en konstruktion i ett första läge belastas av en impulslast för att sedan vid ett eller flera senare tillfällen utsättas för ytterligare impulslaster. En sådan serie av belastningsfall är fullt realistiskt och därför mycket önskvärt att undersöka närmare.

När en konstruktion utsatts för en impulsbelastning är det rimligt att den tillfogas någon form av skada så att dess motståndsförmåga, dess såkallade resthållfasthet, mot ytterligare belastning minskar. I detta avsnitt presenteras en beräkningsmetod med vilken en ekvivalent impulslast, motsvarande effekten från flera svagare impulslaster, kan bestämmas. Utgående från detta är det också möjligt att bedöma en byggnads återstående bärförmåga.

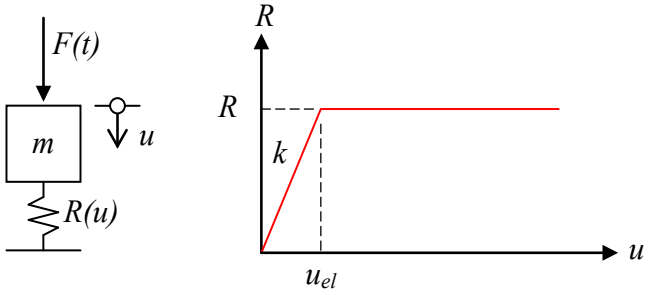
I beskriven metod antas att det sker flera på varandra följande impulsbelastningar på en konstruktionsdel. Det antas dock att respektive belastning sker med sådant mellanrum att utsatt konstruktion hinner återgå till stillastående läge igen innan nästa impulslast inträffar.

4.9.2 Elastisk respons

Vid en ren elastisk respons kommer det inte finnas några kvarstående deformationer hos belastad konstruktion. Dvs. konstruktionen erhåller med en sådan respons ingen bestående skada och kan därför betraktas som helt oskadad för varje ny impulslast som verkar på den. Därmed blir det inte heller meningsfullt att prata i termer om resthållfasthet för en konstruktion med elastisk respons eftersom lastkapaciteten för denna vid varje lasttillfälle motsvarar det oskadade värdet.

4.9.3 Plastisk och elastoplastisk respons

Här studeras en konstruktion med massan m vars respons antas motsvara den för ett elastoplastiskt kraft-förskjutningssamband enligt Figur 4.38.



$$R(u) = \begin{cases} ku, & u \le u_{el} \\ R, & u > u_{el} \end{cases}$$

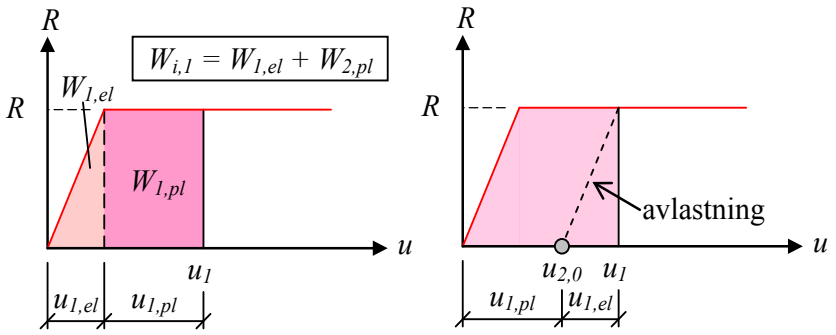
Figur 4.38 Antagen elastoplastisk respons hos studerad konstruktion.

Vid belastning av denna konstruktion med en godtycklig impulslast I_1, genererande ett yttre arbete $W_{y,1}$, fås en respons i konstruktionen enligt Figur 4.39 där

$$W_{y,1} = W_{i,1} = W_{1,el} + W_{1,pl} = \frac{R}{2}\left(u_{1,el} + 2u_{1,pl}\right) \tag{4.182}$$

och den totala förskjutningen

$$u_1 = u_{1,el} + u_{1,pl} \tag{4.183}$$



Figur 4.39 Respons hos studerad konstruktion vid belastning av en impuls I_1.

När den yttre lasten I_1 försvunnit återgår den elastiska delen av förskjutningen och en kvarstående förskjutning

$$u_{2,0} = u_1 - u_{1,el} = u_{1,pl} \tag{4.184}$$

återstår. Vid en påföljande belastning med en impulslast I_2 kommer tillkommande förskjutningen starta från detta läge, se Figur 4.40. På ett motsvarande sätt som vid belastning med lasten I_1, genereras nu ett nytt yttre arbete $W_{y,2}$, som tas upp i konstruktionen

$$W_{y,2} = W_{i,2} = W_{2,el} + W_{2,pl} = \frac{R}{2}\left(u_{2,el} + 2u_{2,pl}\right) \tag{4.185}$$

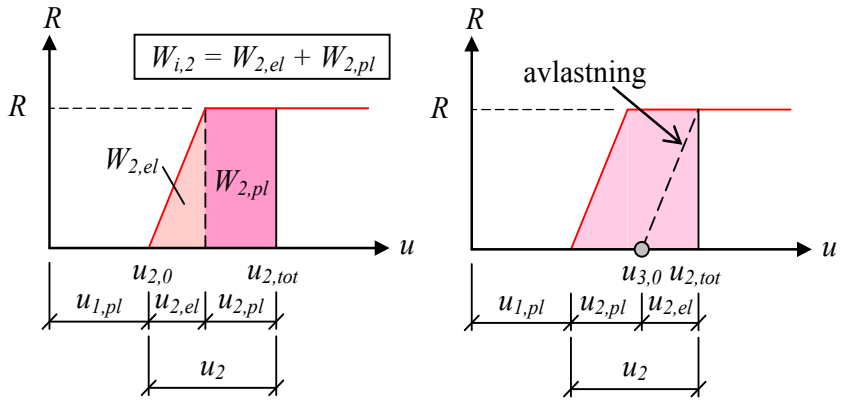
där tillskottsförskjutningen av lasten I_2 kan skrivas som

$$u_2 = u_{2,el} + u_{2,pl} \tag{4.186}$$

och den totala förskjutningen som

$$u_{2,tot} = u_{2,0} + u_2 = u_{1,pl} + u_2 = u_{1,pl} + u_{2,el} + u_{2,pl} \tag{4.187}$$

Under förutsättning att plastisk förskjutning uppnås så kommer den resulterande elastiska energi-upptagningen, och därmed även den elastiska deformationen vara densamma för två godtyckliga impulslaster I_i och I_j, dvs. $W_{i,el} = W_{j,el}$ och $u_{i,el} = u_{j,el}$.



Figur 4.40 Respons hos studerad konstruktion vid belastning av en impuls I_2. En initial förskjutning $u_{0,2} = u_{1,pl}$ kvarstår sedan verkan av impulslast I_1 enligt Figur 4.40.

När den yttre lasten I_2 försvunnit återgår slutligen den elastiska förskjutningen varför en total-förskjutning på

$$u_{3,0} = u_{2,tot} - u_{2,el} = u_{1,pl} + u_{2,pl} \tag{4.188}$$

återstår inför en belastning av en eventuell tredje impulslast I_3.

4.9.4 Ekvivalent impulslast

4.9.4.1 Elastisk respons

Som konstateras i avsnitt 4.9.2 så kan en konstruktion med utpräglad elastisk respons betraktas som helt oskadad inför varje ny impulsbelastning. Därmed blir inte heller begreppet ekvivalent impulslast meningsfullt i en sådan konstruktion eftersom effekten av en serie impulslaster inte kommer att interagera med varandra på något sätt. Effekten av en sådan serie av impulslaster blir därför istället densamma som den av den enskilt största impulslasten, dvs.

$$I_{tot} = \max(I_i) \tag{4.189}$$

4.9.4.2 Plastisk respons

Energiförbrukningen i en konstruktion kommer för varje impulslast ske både elastiskt och plastiskt. Om det elastiska bidraget $W_{i,el}$ är försumbart jämfört med det plastiska bidraget $W_{i,pl}$ så är det möjligt att ta fram ett uttryck för en impulslast I_{tot} vars effekter motsvarar summan av de enskilda effekterna från samtliga impulslaster I_i, dvs. den ekvivalenta impulslasten I_{tot} väljs så att den förskjutning u_{tot} som uppstår av I_{tot} blir densamma som summan av de plastiska förskjutningarna $u_{i,pl}$ för de enskilda impulslasterna I_i. Detta kan skrivas som

$$u_{tot} = u(I_{tot}) = \sum_{i=1}^{n} u_{i,pl}(I_i) \tag{4.190}$$

där n anger antalet impulslaster vars effekter ska summeras. Genom att på säker sida ansätta att den elastiska energiupptagningen är noll, dvs. $W_{i,el} = 0$, fås ett totalt yttre arbete att ta upp som

$$W_{y,tot} = \sum_{i=1}^{n} W_{y,i} = \sum_{i=1}^{n} \left(W_{i,el} + W_{i,pl}\right) = \sum_{i=1}^{n} W_{i,pl} \tag{4.191}$$

där det yttre arbetet W_y, likställt med det av impulslasten genererad rörelseenergi E_k, tecknas som

$$W_{y,i} = E_{k,i} = \frac{I_i^{\,2}}{2m} \tag{4.192}$$

och det inre arbetet som

$$W_{i,pl} = R \cdot u_{i,pl} \tag{4.193}$$

Med ekvation (4.192) och (4.193) insatta i ekvation (4.191) fås med nyttjande av ekvation (4.190)

$$\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{n} I_i^{\,2} = R\sum_{i=1}^{n} u_{i,pl} = R \cdot u_{tot,pl} \tag{4.194}$$

varvid den totala plastiska förskjutningen blir

$$u_{tot,pl} = \frac{1}{2Rm}\sum_{i=1}^{n} I_i^{\,2} \tag{4.195}$$

Den ekvivalenta impulslasten I_{tot} kan bestämmas ur motsvarande samband

$$u_{tot,pl} = \frac{I_{tot}^{\,2}}{2Rm} \tag{4.196}$$

varvid I_{tot} slutligen kan bestämmas genom att kombinera ekvation (4.195) och (4.196), vilket ger

$$I_{tot} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} I_i^{\,2}} = \sqrt{I_1^{\,2} + \ldots + I_n^{\,2}} \tag{4.197}$$

4.9.4.3 Elastoplastisk respons

I föregående avsnitt beskrivs den ekvivalenta impulslast som fås om den elastiska delen av den utsatta konstruktionens energiupptagningsförmåga försummas. Detta är ett antagande på säker sida och i flera fall fullt tillräckligt. Det är dock även av intresse att kunna uppskatta aktuell ekvivalent impulslast i ett fall där den elastiska energiupptagningen beaktas.

Som berörs i avsnitt 4.9.2 medför en strukturell respons som ligger helt inom det elastiska området ingen skada på konstruktionen. För en konstruktion med ett elastoplastiskt beteende innebär detta därför att om den utsätts för en impulslast som är så svag att det plastiska området inte uppnås så kommer inte heller den aktuella impulslasten bidra något till den ekvivalenta impulslasten I_{tot}, se avsnitt 4.9.4.1. Tillåten storlek på en sådan impulslast bestäms av

$$W_{y,i} = W_{i,el} \tag{4.198}$$

där $W_{y,i}$ bestäms enligt ekvation (4.192) och $W_{i,el}$ av

$$W_{i,el} = \frac{R \cdot u_{i,el}}{2} \tag{4.199}$$

där

$$u_{i,el} = \frac{R}{k} \tag{4.200}$$

och k anger konstruktionens elastiska styvhet, se Figur 4.38. Insatt i ekvation (4.199) fås då

$$W_{i,el} = \frac{R^2}{2k} \tag{4.201}$$

och tillsammans ger detta ett mått på den högsta tillåtna impulslasten I_{el}, för vilken konstruktionen inte ådrar sig någon skada. Denna impulslast kan skrivas som

$$I_{el} = \sqrt{Rm \cdot u_{el}} = R \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{R}{\omega} \tag{4.202}$$

där m är konstruktionens ekvivalenta massa och ω är dess vinkelfrekvens. Om impulslasten dock är större än så, dvs. $I_i > I_{el}$, fås en skada i konstruktionen som måste beaktas i beräkningarna. Dessa utgår från energijämvikten i ekvation (4.191) men modifieras för att även beakta inverkan av elastisk energiupptagning varvid det kan konstateras att den elastiska energin är konstant enligt ekvation (4.199).

$$W_{y,tot} = n \cdot W_{el} + \sum_{i=1}^{n} W_{i,pl} \tag{4.203}$$

Genom att kombinera detta uttryck med ekvation (4.192), (4.193) samt (4.199) fås

$$\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{n} I_i^{\,2} = R\left(n \cdot \frac{u_{el}}{2} + u_{tot,pl} \right) \tag{4.204}$$

vilket omskrivet ger

$$u_{tot,pl} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Rm} \sum_{i=1}^{n} I_i^{\,2} - n \cdot u_{el} \right) \tag{4.205}$$

På samma form fås förskjutningen $u_{tot,pl}$, orsakat av den ekvivalenta impulsen I_{tot}, som

$$u_{tot,pl} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Rm} I_{tot}^{\,2} - u_{el} \right) \tag{4.206}$$

vilket insatt i ekvation (4.205) ger

$$I_{tot} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} I_i^{\,2} - (n-1) \cdot Rm \cdot u_{el}} \tag{4.207}$$

som med nyttjande av ekvation (4.202) kan skrivas om som

$$I_{tot} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} I_i^{\,2} - (n-1) \cdot I_{el}^{\,2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(I_i^{\,2} - I_{el}^{\,2} \right) + I_{el}^{\,2}} \tag{4.208}$$

där $I_i > I_{el}$ för att impulslasten ska beaktas. Detta är ett mer generellt uttryck av den ekvivalenta impulslasten än vad som tidigare getts i ekvation (4.197) och det kan noteras att det där givna uttrycket återfås om $I_{el} = 0$, vilket antogs i dess härledning.

4.9.5 Återstående bärförmåga

Genom att använda uttrycket i ekvation (4.208) är det för en skadad konstruktion möjligt att bestämma vilken storlek på en möjlig impulslast som kan påverka konstruktionen innan denna kollapsar. Utgå från att *n-1* stycken impulslaster $I_i > I_{el}$ redan verkat mot studerad konstruktion. Tillåten storlek på nästa impulslast $I_n > I_{el}$ kan då beräknas som

$$I_n = \sqrt{I_{tot}^{\ 2} - \sum_{i=1}^{n-1}\left(I_i^{\ 2} - I_{el}^{\ 2}\right)} \tag{4.209}$$

där storleken på I_{el} bestäms av ekvation (4.202).

Om det istället är känt vilken kvarstående plastisk förskjutning $u_{tot,pl}$ som konstruktionen tål samt vilken kvarstående förskjutning $u_{n,0}$ den har innan ytterligare impulslast läggs på så kan tillåten storlek på nästa impulslast I_n beräknas från

$$I_n = \sqrt{2Rm \cdot u_{n,pl}} \tag{4.210}$$

där

$$u_{n,pl} = u_{tot,pl} - u_{n,0} \tag{4.211}$$

5 Slutsatser

5.1 Sammanställning och kommentarer

Denna rapport behandlar bebyggelsens förmåga att motstå de påfrestningar som orsakas av en impulsbelastning vid exempelvis en explosion. En övergripande genomgång ges av vad som skiljer sig i responsen hos en konstruktion när den utsätts för en statisk eller dynamisk last. Kritiska parametrar berörs och det redogörs för vilka egenskaper som är viktiga för att en utsatt konstruktion ska klara uppkomna påfrestningar vid denna typ av belastning. Råd ges för hur en konstruktion ska utformas för att uppvisa god motståndsförmåga samt vilka åtgärder som kan göras för att förstärka en befintlig konstruktion.

Huvudfokus i rapporten ägnas åt att beskriva en beräkningsmodell för en dynamiskt belastad balk. Bakomliggande teori gås igenom med utgångspunkt från ett enfrihetsgradsystem och frågor som behandlats inom detta är bland annat:

- Teoretisk bakgrund ges till samband mellan impulslast, uträttat arbete, resulterande förskjutning samt tillhörande ekvivalenta statiska last för ett system med elastisk, plastisk eller elastoplastisk respons. Det konstateras att för en impulsbelastad konstruktion är deformationsförmågan ofta en helt avgörande egenskap för att motstå resulterande påfrestningar och en mjuk och eftergivlig, seg respons är att föredra framför en styv, men spröd, respons med hög hållfasthet.
- Begreppet skadekurvor behandlas och samband för ett antal last-tidssamband ges för system med elastisk eller plastisk respons. Utgående från dessa härleds en metodik för att bedöma när en dynamisk last fungerar som en impulslast. Framtagna samband gör det möjligt att utgående från lastens varaktighet (elastisk respons) eller magnitud (plastisk respons), i kombination med den utsatta konstruktionens egenskaper, bedöma i vilken grad aktuell last motsvarar en karakteristisk impulslast. Utgående från givna samband kan denna last också enkelt modifieras för att motsvara en karakteristisk impulslast.
- Teoretisk bakgrund ges för koppling mellan balk och enfrihetsgradsystem via såkallade transformationsfaktorer κ. Vidare härleds dessa för ett antal vanliga randvillkor och belastningssituationer.
- Samband för ekvivalent statisk last samt maximala stöd- och fältmoment hos balk med elastisk eller plastisk respons som utsätts för en impulslast. Det visas att betydelsen av balkens spännvidd, för uppkomna moment, minskar drastiskt hos en impulsbelastad balk jämfört med motsvarande statiskt belastade balk.
- Genomgång och jämförelse av tillåten rotationskapacitet, samt resulterande deformationsförmåga, hos armerade betongkonstruktioner enligt olika beräkningsmetoder samt en övergripande jämförelse med försök från litteraturen. Genomgång av olika beräkningsmodeller för att prediktera tillåten rotationskapacitet visar att spridningen på resultaten kan vara tämligen stor. Det konstateras att rotationskapaciteter enligt Betonghandboken kan betraktas som onödigt konservativa och tillsvidare, i väntan på ytterligare information, rekommenderas att Eurokod 2 används för att bedöma armerade betongkonstruktioners rotationskapacitet. Den såkallade Bk 25 bedöms dock kunna vara ett acceptabelt alternativ om tillåten medeltöjning hos armeringen begränsas till $\varepsilon_s = 2$ %.

- En metod för att bedöma en konstruktions återstående bärförmåga när den redan utsatts för en impulslast ges. Via denna kan last från flera isolerade impulslaster omvandlas till en ekvivalent impulslast med samma verkan.
- Illustration av beräkningsgång för ett fiktivt fall med en explosion som inträffar bebyggelsen. Beskrivet beräkningsexempel går igenom olika nödvändiga delar från lastdefinition, dynamisk respons samt efterföljande kapacitetskontroll hos utsatt konstruktionsdel.

5.2 Behov av fortsatt arbete

Här beskrivna beräkningsmetoder för impulsbelastade konstruktioner utgår från responsen hos ett enfrihetsgradsystem. Detta kopplas sedan mot balkar via givna antaganden om balkens utböjningsform. Kontroll av dessa antaganden samt jämförelse av resulterande moment- och tvärkraftsamband med de som fås via koncept med ekvivalent statisk last, via flerfrihetsgradsystem med linjära och olinjära finita elementanalyser, är önskvärt. I en sådan studie vore det även värdefullt att närmare undersöka hur transformationsfaktorn κ_{MF} ska bestämmas för ett elastoplastiskt system. Vid beräkning av ett system med elastisk eller plastisk respons används, baserat på respektive systems antagna utböjningsform, olika värden på κ_{MF}. För motsvarande system, men med elastoplastisk respons, inträffar dock båda dessa stadier varför κ_{MF} också kommer ändra sig beroende på i vilket stadium konstruktionen befinner sig i. Hur κ_{MF} ska bestämmas i ett sådant fall är oklart och av intresse att undersöka vidare.

Denna rapport begränsas till att studera balkar utsatta för impulsbelastning. Konceptet är dock detsamma för fyrsidigt upplagda plattor. En motsvarande genomgång av transformationsfaktorer för plattor samt beräkningsexempel på ett sådant fall är därför av intresse.

Den genomgång av armerade betongkonstruktioners rotationskapacitet som presenteras här visar att det råder viss osäkerhet i hur denna ska predikteras. Undersökta beräkningsmetoder ger resultat med stor spridning, vilket är olyckligt eftersom en tillförlitlig prediktion av denna parameter är så pass betydelsefull vid bedömning av en betongkonstruktions motståndsförmåga mot impulsbelastning. Ett fördjupat arbete innehållande en mer nyanserad genomgång av tillgänglig information om rotationskapacitet i litteraturen bedöms vara nödvändigt för att få fram tillförlitliga riktlinjer för tillåtna värden som inte är alltför konservativa. Om möjligt bör särskild vikt i en sådan studie läggas på att utröna vilken skillnad som kan förväntas för denna egenskap när konstruktionen utsätts för en dynamisk kontra en statisk belastning.

I utförd genomgång av brottkriterier konstateras att en betydande tvärkraft kan uppstå nära stöd och/eller lastangrepp vid en impulsbelastning men fenomenet behandlas inte vidare mer än så. Det finns därför behov av en kompletterande studie som klargör hur denna tvärkraft ska bestämmas samt hur kontroll av den utsatta konstruktionens kapacitet ska göras.

I genomgång av möjliga förstärkningsmetoder för befintliga byggnader diskuteras användandet av skiftande material, exempelvis betongplattor med mellanliggande skivor av cellplast. Det är i denna rapport inte närmare utrett hur en sådan detalj fungerar samt vilken utformning och kombinering som ska eftersträvas för att nå maximal effekt och en sådan studie vore därför värdefull.

6 Referenser

An L. och Cederwall K. (1995): Rotational capacity of concrete beams: Summary of Re-evaluation of Test Results. Avdelningen för Betongbyggnad, Chalmers Tekniska Högskola, Rapport 95:1, Göteborg, 54 sid.

Ansell A. och Svedbjörk G. (2000): Statisk provning av fritt upplagda plattstrimlor av betong med armering av varierande seghet. Avdelningen för Betongbyggnad, Kungliga Tekniska Högskolan, Teknisk rapport 2000:16, Stockholm, 50 sid.

Ansell A. och Svedbjörk G. (2001a): Statisk provning av kontinuerliga plattstrimlor av betong med armering av varierande seghet. Avdelningen för Betongbyggnad, Kungliga Tekniska Högskolan, Teknisk rapport 2001:9, Stockholm, 52 sid.

Ansell A. och Svedbjörk G. (2001b): Dynamisk provning av fritt upplagda plattstrimlor av betong med armering av varierande seghet. Avdelningen för Betongbyggnad, Kungliga Tekniska Högskolan, Teknisk rapport 2001:15, Stockholm, 60 sid.

Ansell A. och Svedbjörk G. (2002): Dynamisk provning av kontinuerliga plattstrimlor av betong med armering av varierande seghet. Avdelningen för Betongbyggnad, Kungliga Tekniska Högskolan, Teknisk rapport 2002:9, Stockholm, 37 sid.

Ansell A. och Svedbjörk G. (2003a): Kompletterande dynamisk provning av kontinuerliga plattstrimlor av betong med armering av varierande seghet. Avdelningen för Betongbyggnad, Kungliga Tekniska Högskolan, Teknisk rapport 2003:3, Stockholm, 51 sid.

Ansell A. och Svedbjörk G. (2003b): Statisk och dynamisk provning av fritt upplagda plattstrimlor med varierande betongkvalitet och armeringskonfiguration. Avdelningen för Betongbyggnad, Kungliga Tekniska Högskolan, Teknisk rapport 2003:8, Stockholm, 57 sid.

Ansell A. och Svedbjörk G. (2005): Statisk provning av fritt upplagda plattstrimlor med varierande tvärsnittsareor. Avdelningen för Betongbyggnad, Kungliga Tekniska Högskolan, Teknisk rapport 2005:6, Stockholm, 58 sid.

Baker W.E. (1973): Explosions in Air. University of Texas Press, Austin, USA.

Balazs P. (1997): Beräkningsmetoder vid stötvågsbelastade konstruktioner. Försvarets forsknings-anstalt, Avdelningen för vapen och skydd, FOA-R—97-00473-311—SE, Stockholm.

Betonghandboken (1990): Betonghandboken – Konstruktion, utgåva 2. Redigerad av Cederwall K., Lorentsen M. och Östlund L., Svensk Byggtjänst, Stockholm.

Biggs J.M. (1964): Introduction to Structural Dynamics. McGraw-Hill, New-York, USA.

Bischoff P.H. och Perry S.H. (1991): Compressive behaviour of concrete at high strain rates. Materials and Structures, 1991, 24, sid 425-450.

Boverket (2008): Regelsamling för konstruktion – Boverkets konstruktionsregler, BKR 12. Boverket, BFS 2008:7, Karlskrona.

Cederwall K., Losberg A., Palm G. (1974): Armerade betongbalkars rotationskapacitet - Jämförelse mellan normalbetong och lättballastbetong med beaktande av armeringsmaterialets arbetskurva., Nordisk Betong 1974:4, sid 9-16.

CEN (2004): Eurocode 2: Design of Concrete Structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings. Euoropean Comittee for Standardization, Bryssel, Belgien.

ConWep (1992): ConWep – Collection of conventional weapons effects calculations based on TM 5-855-1, Fundamentals of Protective Design for Conventional Weapons, U.S. Army Engineer Waterways Experiment Station, Vicksburg, USA.

DDESB (2008): Structures to Resist the Effects of Accidental Explosions. UFC 3-340-02, Departement of Defense, USA.

Ekengren B., Johansson M., Laine L., Leppänen J. (2005): Dynamisk lastpåverkan - Referensbok. Räddningsverket, Karlstad.

Fischer S., Forsén R., Hertzberg O., Jacobsson A., Runn P., Thaning L., Winter S. (1998): Våda-utsläpp av Brandfarliga och Giftiga Gaser och Vätskor, Metoder för bedömning av risker, Andra reviderade och utökade upplagan. Avdelningen för NBC-skydd och Avdelningen för Vapen och Skydd, Försvarets Forskningsanstalt, FOA-R--97-00490-990—SE, Stockholm.

Forsén R. (1984): Sprängattentatet i Fontainebleau – En beskrivning av verkan från Cfs synpunkt. Försvarets forskningsanstalt, FOA Rapport C 20547-D4, Stockholm, 77 sid.

Forsén R. (1998): Tryck vid explosioner. Kapitel 10 i Fischer *et al.* (1998), sid 279-312.

Fortifikationsförvaltningen (1973a): Provisoriska anvisningar för dimensionering av armerade betongkonstruktioner som skydd mot verkan av konventionella vapen inom närmissområde. Fortifikationsförvaltningen, Befästningsavdelningen, Publ nr 25:1 Bk/1973, Stockholm, 86 sid.

Fortifikationsförvaltningen (1973b): Provisoriska anvisningar för dimensionering av armerade betongkonstruktioner som skydd mot verkan av konventionella vapen inom närmissområde - Kommentarer. Fortifikationsförvaltningen, Befästningsavdelningen, Publ nr 25:2 Bk/1973, Stockholm, 34 sid.

Granström S. (1958): Beräkningsmetod för stötvågsbelastade konstruktioner. Forsknings och försökssektionen, Befästningsbyrån, Kungliga Fortifikationsförvaltningen, Rapport nr 103:18, Stockholm.

Grassl P. (1999): Splicing of Reinforcement Loops in Beams: Experiments and Non-linear Finite Element Analyses. Avdelningen för Betongbyggnad, Chalmers Tekniska Högskola, Examens-arbete 99:4, Göteborg.

Hallgren P. and Granström S. (1977): Ras mot Skyddsrumstak – beräkningsmodell. Tyréns, Stockholm, 28 sid.

Höglund T., Petersson T., Sundquist H. (2001): Stomprojektering. Avdelningen för Brobyggnad, Kungliga Tekniska Högskolan, Rapport 38, Utgåva 4, Stockholm, 110 sid.

Johansson M. (1997): Armeringsseghetens inverkan på deformationsförmågan hos betongkonstruktioner. Avdelningen för Betongbyggnad, Chalmers Tekniska Högskola, Rapport 97:1, Göteborg.

Johansson M. (1999): Non-linear Finite Element Analyses of Civil Defence Shelter Subjected to Explosion Load or Impact Load. Avdelningen för Betongbyggnad, Chalmers Tekniska Högskola, Rapport 99:8, Göteborg.

Johansson M. (2000): Structural Behaviour in Concrete Frame Corners of Civil Defence Shelters: Non-linear Finite Element Analyses and Experiments. Avdelningen för Betongbyggnad, Chalmers Tekniska Högskola, Publikation 00:2, Göteborg.

Johansson M. och Laine L. (2012a): Bebyggelsens motståndsförmåga mot extrem dynamisk belastning, Del 1: Last av luftstötvåg. Myndigheten för samhällsskydd och beredskap. Publ.nr MSB449, Karlstad.

Johansson M. och Laine L. (2012b): Bebyggelsens motståndsförmåga mot extrem dynamisk belastning, Del 2: Explosion i gatukorsning. Myndigheten för samhällsskydd och beredskap. Publ.nr MSB450, Karlstad.

Kivity Y. och Ben-Dor G. (2006): Mitigation of blast and impact loads using thin walled tubes. Proceedings of the 19th Symposium on the Military Aspects of Blast and Shock, Calgary, Kanada.

Laine L. (2002): Datorsimulering av markstötvåg i lösa jordarter, samt utformning av passivt skydd mot markstötvågor. Räddningsverket, Rapport B54-221/02, Karlstad

NWT (2007): Brand utlöste kraftig explosion hos sprängfirma. Nya Wermlands-Tidningen, http://www.nwt.se/dalsland/article20871.ece.

Nyström U. (2006): Design with regard to explosions. Avdelningen för Konstruktionsteknik, Betongbyggnad, Chalmers tekniska högskola, Examensarbete 06:14.

Plem E. (1972): Flytleders rotationskapacitet. Lund.

Räddningsverket (2006): Skyddsrum SR 06. Räddningsverket, Publikation B54-141/06, Karlstad.

Samuelsson A. och Wiberg N.E (1988): Byggnadsmekanik Hållfasthetslära. Studentlitteratur, Lund.

Samuelsson A. och Wiberg N.E (1990): Byggnadsmekanik Bärverk. Studentlitteratur, Lund.

Öberg S. (1976): Armerade betongbalkars rotationskapacitet: Inverkan av armeringsmaterialets arbetskurva på rotationskapaciteten för balkar i normalbetong. Avdelningen för Betongbyggnad, Chalmers Tekniska Högskola, Rapport 76:7, Göteborg, 54 sid.

Bilaga A Härledning av transformationsfaktorer κ

A.1 Orientering

I denna bilaga härleds de transformationsfaktorer κ som används för att omvandla en balk till ett enfrihetsgradsystem med den dynamiska grundekvationen κ

$$\kappa_m m_b \ddot{u} + \kappa_k k_b u = \kappa_F F_b(t) \tag{A.1}$$

Nyttjade uttryck för tranformationsfaktorerna är beskrivna i avsnitt 4.6.2 och sammanfattas i ekvation (A.2) till (A.8). Med antagande av en konstant massa per längdenhet, $m'(x) = m'$, samt bevarande av systemets rörelseenergi fås en transformationsfaktor κ_M för massan som

$$\kappa_m = \frac{1}{l}\int_{x=0}^{x=l} \frac{u(x)^2}{u_s^{\,2}}\,dx \tag{A.2}$$

Bevarande av påförd energi från yttre last ger en transformationsfaktor κ_F för den yttre lasten som

$$\kappa_F = \int_{x=0}^{x=l} \frac{q(x)\cdot u(x)}{F_b \cdot u_s}\,dx \tag{A.3}$$

där det för en jämnt utbredd last $q(x) = q$ fås att

$$\kappa_F = \frac{1}{l}\int_{x=0}^{x=l} \frac{u(x)}{u_s}\,dx \tag{A.4}$$

samt för en balk belastad med en enskild punktlast F att

$$\kappa_F = 1{,}0 \tag{A.5}$$

För bevarande av inre energi fås enligt Biggs (1964) att transformationsfaktor κ_F för det inre mothållet att

$$\kappa_k = \kappa_F \tag{A.6}$$

Med nyttjande av ekvation (A.6) kan ekvation (A.1) skrivas som

$$\kappa_{mF} m_b \ddot{u} + k_b u = F_b(t) \tag{A.7}$$

där

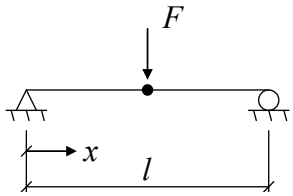
$$\kappa_{mF} = \frac{\kappa_m}{\kappa_F} \tag{A.8}$$

Värden för κ tas fram för balk, med fyra olika randvillkor, belastad med punktlast respektive jämnt utbredd last med antagande om linjärelastisk eller plastisk respons. För samtliga fall gäller att en jämnstyv balk med konstant massa/längdenhet antas.

A.2 Elastisk respons

A.2.1 Balk belastad med punktlast

A.2.1.1 Fritt upplagd balk



Figur A.1 Fritt upplagd balk belastad med punktlast, elastisk respons. Systempunkt markeras.

Deformationen *u(x)* för en balk med randvillkor och belastning enligt Figur A.1 kan uttryckas som

$$u(x) = \frac{l^2}{48EI}\left(3x - \frac{4x^3}{l^2}\right) \cdot F \quad \text{för} \quad 0 \le x \le \frac{l}{2} \tag{A.9}$$

varvid deformationen u_s i systempunkten kan beräknas som

$$u_s = u\left(x = \frac{l}{2}\right) = \frac{l^3}{48EI} \cdot F \tag{A.10}$$

Via symmetri gäller

$$\begin{aligned} \kappa_m &= 2 \cdot \frac{1}{l} \int_{x=0}^{x=l/2} \frac{1}{l^2} \cdot \left(3x - \frac{4x^3}{l^2}\right)^2 dx = \frac{2}{l^3} \int_{x=0}^{x=l/2} \left(9x^2 - 24\frac{x^4}{l^2} + 16\frac{x^6}{l^4}\right) dx = \\ &= \frac{2}{l^3}\left[\frac{9}{3}x^3 - \frac{24}{5}\frac{x^5}{l^2} + \frac{16}{7}\frac{x^7}{l^4}\right]_{x=0}^{x=l/2} \approx 0{,}486 \end{aligned} \tag{A.11}$$

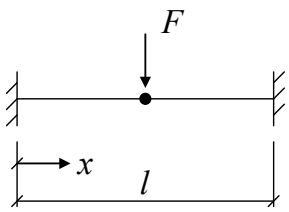
Punktlast i systempunkten medför att

$$\kappa_F = 1{,}000 \tag{A.12}$$

varvid slutligen fås

$$\kappa_{mF} = \frac{\kappa_m}{\kappa_F} = 0{,}486 \tag{A.13}$$

A.2.1.2 Dubbelsidigt fast inspänd balk



Figur A.2 Dubbelsidigt fast inspänd balk belastad med punktlast, elastisk respons. Systempunkt markeras.

Deformationen *u(x)* för en balk med randvillkor och belastning enligt Figur A.2 kan uttryckas som

$$u(x) = \frac{l}{48EI}\left(3x^2 - \frac{4x^3}{l}\right)\cdot F \quad \text{för} \quad 0 \le x \le \frac{l}{2} \tag{A.14}$$

varvid deformationen u_s i systempunkten kan beräknas som

$$u_s = u\left(x = \frac{l}{2}\right) = \frac{l^3}{192EI}\cdot F \tag{A.15}$$

Via symmetri gäller

$$\begin{aligned}\kappa_m &= 2\cdot\frac{1}{l}\int_{x=0}^{x=l/2}\left(\frac{4}{l^2}\right)^2\cdot\left(3x^2 - \frac{4x^3}{l}\right)^2 dx = \frac{32}{l^5}\int_{x=0}^{x=l/2}\left(9x^4 - 24\frac{x^5}{l} + 16\frac{x^6}{l^2}\right)dx = \\ &= \frac{32}{l^5}\left[\frac{9}{5}x^5 - \frac{24}{6}\frac{x^6}{l} + \frac{16}{7}\frac{x^7}{l^2}\right]_{x=0}^{x=l/2} \approx 0{,}371\end{aligned} \tag{A.16}$$

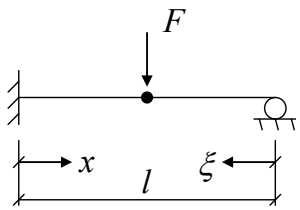
Punktlast i systempunkten medför att

$$\kappa_F = 1{,}000 \tag{A.17}$$

varvid slutligen fås

$$\kappa_{mF} = \frac{\kappa_m}{\kappa_F} = 0{,}371 \tag{A.18}$$

A.2.1.3 Fast inspänd balk med rullstöd



Figur A.3 Fast inspänd balk med rullstöd belastad med punktlast, elastisk respons. Systempunkt markeras.

Deformationen *u(x)* och *u(ξ)* för en balk med randvillkor och belastning enligt Figur A.3 kan uttryckas som

$$u(x) = \frac{l}{96EI}\left(9x^2 - \frac{11x^3}{l}\right)\cdot F \quad \text{för} \quad 0 \le x \le \frac{l}{2} \tag{A.19}$$

$$u(\xi) = \frac{l^2}{96EI}\left(3\xi - \frac{5\xi^3}{l^2}\right)\cdot F \quad \text{för} \quad 0 \le \xi \le \frac{l}{2} \tag{A.20}$$

varvid deformationen u_s i systempunkten kan beräknas som

$$u_s = u\left(x = \frac{l}{2}\right) = \frac{7l^3}{768EI}\cdot F \tag{A.21}$$

Detta ger

$$\begin{aligned}\kappa_m &= \frac{1}{l}\int_{x=0}^{x=l/2}\left(\frac{8}{7l^2}\right)^2\cdot\left(9x^2 - \frac{11x^3}{l}\right)^2 dx + \int_{\xi=0}^{\xi=l/2}\left(\frac{8}{7l^2}\right)^2\cdot\left(3\xi - \frac{5\xi^3}{l^2}\right)^2 d\xi = \\ &= \frac{64}{49l^5}\left(\int_{x=0}^{x=l/2}\left(81x^4 - 198\frac{x^5}{l} + 121\frac{x^6}{l^2}\right)dx + \int_{\xi=0}^{\xi=l/2}\left(9\xi^2 - 30\frac{\xi^4}{l^2} + 25\frac{\xi^6}{l^4}\right)d\xi\right) = \\ &= \frac{64}{49l^5}\left(\left[\frac{81}{5}x^5 - \frac{198}{6}\frac{x^6}{l} + \frac{121}{7}\frac{x^7}{l^2}\right]_{x=0}^{x=l/2} + \left[\frac{9}{3}\xi^3 - \frac{30}{5}\frac{\xi^5}{l^2} + \frac{25}{7}\frac{\xi^7}{l^4}\right]_{\xi=0}^{\xi=l/2}\right) \approx 0{,}445\end{aligned} \tag{A.22}$$

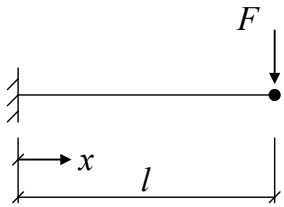
Punktlast i systempunkten medför att

$$\kappa_F = 1{,}000 \tag{A.23}$$

varvid slutligen fås

$$\kappa_{mF} = \frac{\kappa_m}{\kappa_F} = 0{,}445 \tag{A.24}$$

A.2.1.4 Konsolbalk



Figur A.4 Konsolbalk balk belastad med punktlast, elastisk respons. Systempunkt markeras.

Deformationen *u(x)* för en balk med randvillkor och belastning enligt Figur A.4 kan uttryckas som

$$u(x) = \frac{l}{2EI}\left(x^2 - \frac{x^3}{3l}\right) \cdot F \quad \text{för} \quad 0 \le x \le l \tag{A.25}$$

varvid deformationen u_s i systempunkten kan beräknas som

$$u_s = u(x = l) = \frac{l^3}{3EI} \cdot F \tag{A.26}$$

Via symmetri gäller

$$\begin{aligned} \kappa_m &= \frac{1}{l}\int_{x=0}^{x=l/2}\left(\frac{3}{2l^2}\right)^2 \cdot \left(x^2 - \frac{x^3}{3l}\right)^2 dx = \frac{9}{4l^5}\int_{x=0}^{x=l/2}\left(x^4 - \frac{2}{3}\frac{x^5}{l} + \frac{1}{9}\frac{x^6}{l^2}\right)dx = \\ &= \frac{9}{4l^5}\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{18}\frac{x^6}{l} + \frac{1}{63}\frac{x^7}{l^2}\right]_{x=0}^{x=l} \approx 0{,}236 \end{aligned} \tag{A.27}$$

Punktlast i systempunkten medför att

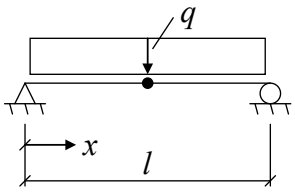
$$\kappa_F = 1{,}000 \tag{A.28}$$

varvid slutligen fås

$$\kappa_{mF} = \frac{\kappa_m}{\kappa_F} = 0{,}236 \tag{A.29}$$

A.2.2 Balk belastad med jämnt utbredd last

A.2.2.1 Fritt upplagd balk



Figur A.5 Dubbelsidigt fast inspänd balk belastad med jämnt utbredd last, elastisk respons. Systempunkt markeras.

Deformationen *u(x)* för en balk med randvillkor och belastning enligt Figur A.5 kan uttryckas som

$$u(x) = \frac{l^2}{24EI}\left(x - \frac{2x^3}{l^2} + \frac{x^4}{l^3}\right)\cdot q \quad \text{för} \quad 0 \le x \le \frac{l}{2} \tag{A.30}$$

varvid deformationen u_s i systempunkten kan beräknas som

$$u_s = u\left(x = \frac{l}{2}\right) = \frac{5l^3}{384EI}\cdot ql \tag{A.31}$$

Via symmetri gäller

$$\begin{aligned}\kappa_m &= 2\cdot\frac{1}{l}\int_{x=0}^{x=l/2}\left(\frac{384}{5\cdot 24\cdot l}\right)^2\cdot\left(x - \frac{2x^3}{l^2} + \frac{x^4}{l^3}\right)^2 dx = \\ &= \frac{512}{25l^3}\int_{x=0}^{x=l/2}\left(x^2 - 4\frac{x^4}{l^2} + 2\frac{x^5}{l^3} + 4\frac{x^6}{l^4} - 4\frac{x^7}{l^5} + \frac{x^8}{l^6}\right)dx = \\ &= \frac{512}{25l^3}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{5}\frac{x^5}{l^2} + \frac{2}{6}\frac{x^6}{l^3} + \frac{4}{7}\frac{x^7}{l^4} - \frac{4}{8}\frac{x^8}{l^5} + \frac{1}{9}\frac{x^9}{l^6}\right]_{x=0}^{x=l/2} \approx 0{,}504\end{aligned} \tag{A.32}$$

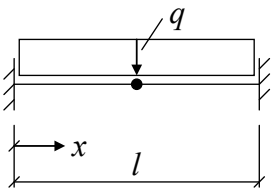
Transformationsfaktorn för den utbredda lasten fås via symmetri

$$\kappa_F = 2\cdot\frac{1}{l}\int_{x=0}^{x=l/2}\left(\frac{384}{5\cdot 24\cdot l}\right)\cdot\left(x - \frac{2x^3}{l^2} + \frac{x^4}{l^3}\right)dx = \frac{32}{5l^3}\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{4}\frac{x^4}{l^2} + \frac{1}{5}\frac{x^5}{l^3}\right]_{x=0}^{x=l/2} \approx 0{,}640 \tag{A.33}$$

varvid slutligen fås

$$\kappa_{mF} = \frac{\kappa_m}{\kappa_F} = \frac{0{,}504}{0{,}640} = 0{,}787 \tag{A.34}$$

A.2.2.2 Dubbelsidigt fast inspänd balk



Figur A.6 Dubbelsidigt fast inspänd balk belastad med jämnt utbredd last, elastisk respons. Systempunkt markeras.

Deformationen *u(x)* för en balk med randvillkor och belastning enligt Figur A.6 kan uttryckas som

$$u(x) = \frac{l^2}{24EI}\left(x - \frac{x^2}{l}\right)^2 \cdot q = \frac{l^2}{24EI}\left(x^2 - 2\frac{x^3}{l} + \frac{x^4}{l^2}\right) \cdot q \quad \text{för} \quad 0 \le x \le \frac{l}{2} \tag{A.35}$$

varvid deformationen u_s i systempunkten kan beräknas som

$$u_s = u\left(x = \frac{l}{2}\right) = \frac{l^3}{384EI} \cdot ql \tag{A.36}$$

Via symmetri gäller

$$\begin{aligned} \kappa_m &= 2 \cdot \frac{1}{l} \int_{x=0}^{x=l/2} \left(\frac{384}{24 \cdot l}\right)^2 \cdot \left(x^2 - 2\frac{x^3}{l} + \frac{x^4}{l^2}\right)^2 dx = \\ &= \frac{512}{l^3} \int_{x=0}^{x=l/2} \left(x^4 - 4\frac{x^5}{l^2} + 2\frac{x^6}{l^3} + 4\frac{x^6}{l^4} - 4\frac{x^7}{l^5} + \frac{x^8}{l^6}\right) dx = \\ &= \frac{512}{l^3}\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{6}\frac{x^6}{l^2} + \frac{6}{7}\frac{x^7}{l^3} - \frac{4}{8}\frac{x^8}{l^5} + \frac{1}{9}\frac{x^9}{l^6}\right]_{x=0}^{x=L/2} \approx 0{,}406 \end{aligned} \tag{A.37}$$

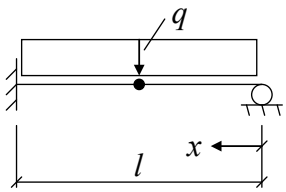
Transformationsfaktorn för den utbredda lasten fås via symmetri

$$\kappa_F = 2 \cdot \frac{1}{l} \int_{x=0}^{x=l/2} \left(\frac{384}{24 \cdot l}\right) \cdot \left(x^2 - 2\frac{x^3}{l^2} + \frac{x^4}{l^3}\right) dx = \frac{32}{l^3}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{4}\frac{x^4}{l^2} + \frac{1}{5}\frac{x^5}{l^3}\right]_{x=0}^{x=l/2} \approx 0{,}533 \tag{A.38}$$

varvid slutligen fås

$$\kappa_{mF} = \frac{\kappa_m}{\kappa_F} = \frac{0{,}406}{0{,}533} = 0{,}762 \tag{A.39}$$

A.2.2.3 Fast inspänd balk med rullstöd



Figur A.7 Fast inspänd balk med rullstöd belastad med jämnt utbredd last, elastisk respons. Systempunkt markeras.

Deformationen *u(x)* för en balk med randvillkor och belastning enligt Figur A.7 kan uttryckas som

$$u(x) = \frac{l^3}{48EI}\left(x - 3\frac{x^3}{l^2} + 2\frac{x^4}{l^3}\right)\cdot q \quad \text{för} \quad 0 \le x \le l \tag{A.40}$$

varvid deformationen u_s i systempunkten kan beräknas som

$$u_s = u\left(x = \frac{l}{2}\right) = \frac{l^3}{192EI}\cdot ql \tag{A.41}$$

Transformationsfaktorn för massan fås som

$$\begin{aligned}\kappa_m &= \frac{1}{l}\int_{x=0}^{x=l}\left(\frac{192}{48\cdot l}\right)^2\cdot\left(x - 3\frac{x^3}{l^2} + 2\frac{x^4}{l^3}\right)^2 dx = \\ &= \frac{16}{l^3}\int_{x=0}^{x=l}\left(x^2 - 6\frac{x^4}{l^2} + 4\frac{x^5}{l^3} + 9\frac{x^6}{l^4} - 12\frac{x^7}{l^5} + 4\frac{x^8}{l^6}\right)dx = \\ &= \frac{16}{l^3}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{6}{5}\frac{x^5}{l^2} + \frac{4}{6}\frac{x^6}{l^3} + \frac{9}{7}\frac{x^7}{l^4} - \frac{12}{8}\frac{x^8}{l^5} + \frac{4}{9}\frac{x^9}{l^6}\right]_{x=0}^{x=l} \approx 0{,}483\end{aligned} \tag{A.42}$$

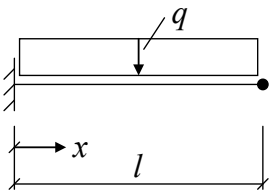
Transformationsfaktorn för den utbredda lasten fås som

$$\kappa_P = \frac{1}{l}\int_{x=0}^{x=l}\left(\frac{192}{48\cdot l}\right)\cdot\left(x - 3\frac{x^3}{l^2} + 2\frac{x^4}{l^3}\right)dx = \frac{4}{l^3}\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}\frac{x^4}{l^2} + \frac{2}{5}\frac{x^5}{l^3}\right]_{x=0}^{x=l} \approx 0{,}600 \tag{A.43}$$

varvid slutligen fås

$$\kappa_{mF} = \frac{\kappa_m}{\kappa_F} = \frac{0{,}483}{0{,}600} = 0{,}805 \tag{A.44}$$

A.2.2.4 Konsolbalk



Figur A.8 Konsolbalk balk belastad med jämnt utbredd last, elastisk respons. Systempunkt markeras.

Deformationen *u(x)* för en balk med randvillkor och belastning enligt Figur A.8 kan uttryckas som

$$u(x) = \frac{l^3}{24EI}\left(6x^2 - \frac{4x^3}{l} + \frac{x^4}{l^2}\right)\cdot q \quad \text{för} \quad 0 \le x \le l \tag{A.45}$$

varvid deformationen u_s i systempunkten kan beräknas som

$$u_s = u(x=l) = \frac{l^3}{8EI}\cdot ql \tag{A.46}$$

Transformationsfaktorn för massan fås som

$$\begin{aligned}\kappa_m &= \frac{1}{l}\int_{x=0}^{x=l}\left(\frac{8}{24\cdot l}\right)^2\cdot\left(6x^2 - \frac{4x^3}{l} + \frac{x^4}{l^2}\right)^2 dx = \\ &= \frac{1}{9l^3}\int_{x=0}^{x=l}\left(36x^4 - 48\frac{x^5}{l} + 12\frac{x^6}{l^2} + 16\frac{x^6}{l^2} - 8\frac{x^7}{l^3} + \frac{x^8}{l^4}\right)dx = \\ &= \frac{1}{9l^3}\left[\frac{36}{5}x^5 - \frac{48}{6}\frac{x^6}{l} + \frac{28}{7}\frac{x^7}{l^2} - \frac{8}{8}\frac{x^8}{l^3} + \frac{1}{9}\frac{x^9}{l^4}\right]_{x=0}^{x=l} \approx 0{,}257\end{aligned} \tag{A.47}$$

Transformationsfaktorn för den utbredda lasten fås som

$$\kappa_F = \frac{1}{l}\int_{x=0}^{x=l}\left(\frac{8}{24\cdot l}\right)\cdot\left(6x^2 - \frac{4x^3}{l} + \frac{x^4}{l^2}\right)dx = \frac{1}{3l^2}\left[\frac{6}{3}x^3 - \frac{4}{4}\frac{x^4}{l} + \frac{1}{5}\frac{x^5}{l^2}\right]_{x=0}^{x=l} \approx 0{,}400 \tag{A.48}$$

varvid slutligen fås

$$\kappa_{mF} = \frac{\kappa_m}{\kappa_F} = \frac{0{,}257}{0{,}400} = 0{,}642 \tag{A.49}$$

A.3 Plastisk respons

A.3.1 Flytledsteori

För balk med plastisk respons tillämpas flytledsteori där principiellt utseende hos deformerad balk framgår av Figur 4.19. Flytledsteori berörs inte närmare i denna rapport utan hänvisning görs till aktuell litteratur, se exempelvis Samuelsson och Wiberg (1990).

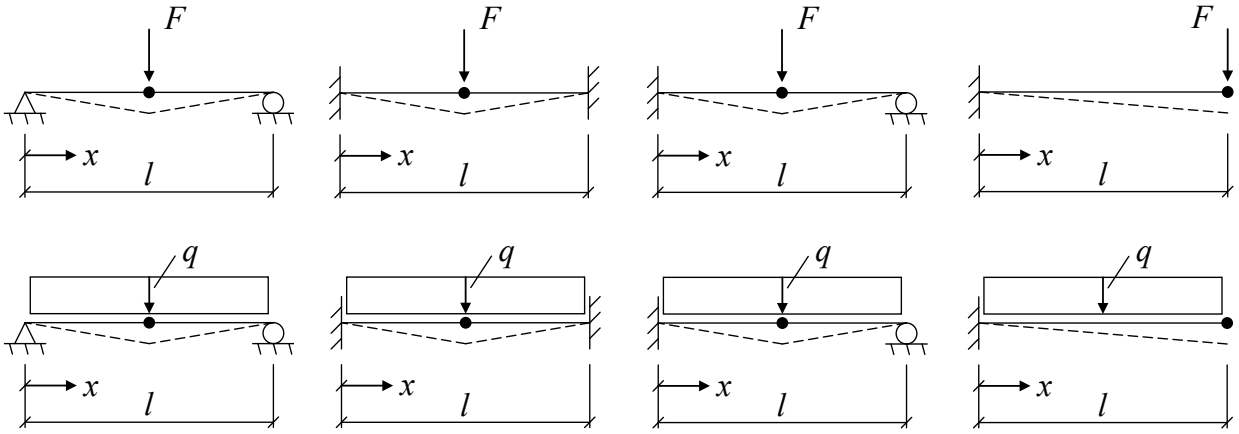
För en jämnstark balk uppstår flytleder i de punkter där maximalt moment fås, vilket innebär att exakt utböjningsform beror på lastens läge. Här begränsas dock till fall med punktlast i balkmitt samt jämnt utbredd last.

För studerade randvillkor fås:

- För jämnstyv dubbelsidigt fritt upplagd balk med symmetrisk belastning uppkommer en flytled i fältmitt. Därefter blir balken en mekanism.
- För jämnstyv dubbelsidigt fast inspänd balk med symmetrisk belastning uppkommer dels en flytled i fältmitt, men också i inspänningssnitten. Då dessa tre flytleder uppkommit blir balken en mekanism.
- För en jämnstyv balk med fast inspänning i ena änden och fri uppläggning i andra uppkommer flytleder dels i inspänningen dels i fält i den punkt där fältmomentet når maximalt värde. Om belastningen utgörs av en enda punktlast uppkommer fältets flytled precis under punktlasten. Om lasten är jämnt fördelad över balken och om balken har lika stort flytmoment i stöd som i fält så uppstår flytleden vid $x = 0{,}414 \cdot l$ med ett plastiskt moment $M_{pl} = 0{,}0858 \cdot ql^2$.
- För en konsol uppkommer den enda flytleden alltid i inspänningspunkten.

Vid plastisk respons fås samma principiella utböjningsform hos belastad balk oavsett randvillkor, vilket innebär att transformationsfaktorerna κ_M och κ_F blir desamma för samtliga belastningsfall.

A.3.2 Transformationsfaktorer



Figur A.9 Deformationsbild för studerade balkar, plastisk respons.

Deformationen *u(x)* för en balk med plastisk respons och två stöd enligt Figur A.9 kan uttryckas

$$u(x) = u_s \cdot \frac{2x}{l} \quad \text{för} \quad 0 \le x \le \frac{l}{2} \tag{A.50}$$

där u_s är förskjutningen i balkens mittpunkt. För en konsolbalk kan förskjutningen uttryckas som

$$u(x) = u_s \cdot \frac{x}{l} \quad \text{för} \quad 0 \le x \le l \tag{A.51}$$

Transformationsfaktorn för massan fås för en balk med två stöd som

$$\kappa_m = 2 \cdot \frac{1}{l} \int_{x=0}^{x=l/2} \left(\frac{2x}{l}\right)^2 dx = \frac{8}{l^3} \int_{x=0}^{x=l/2} x^2 dx = \frac{8}{l^3} \left[\frac{1}{3} x^3\right]_{x=0}^{x=l/2} = \frac{1}{3} \approx 0{,}333 \tag{A.52}$$

och för en konsolbalk som

$$\kappa_m = \frac{1}{l} \int_{x=0}^{x=l} \left(\frac{x}{l}\right)^2 dx = \frac{1}{l^3} \int_{x=0}^{x=l} x^2 dx = \frac{1}{l^3} \left[\frac{1}{3} x^3\right]_{x=0}^{x=l} = \frac{1}{3} \approx 0{,}333 \tag{A.53}$$

Dvs. samma faktor κ_m oavsett randvillkor för en balk med plastisk respons. Punktlast i system-punkten medför att

$$\kappa_F = 1{,}000 \tag{A.54}$$

medan transformationsfaktorn för en utbredd last för balk med två stöd beräknas som

$$\kappa_F = 2 \cdot \frac{1}{l} \int_{x=0}^{x=l/2} \left(\frac{2x}{l}\right) dx = \frac{4}{l^3} \int_{x=0}^{x=l/2} x dx = \frac{4}{l^3} \left[\frac{1}{2} x^2\right]_{x=0}^{x=l/2} = \frac{1}{2} = 0{,}500 \tag{A.55}$$

och för en konsolbalk som

$$\kappa_F = \frac{1}{l} \int_{x=0}^{x=l} \left(\frac{x}{l}\right) dx = \frac{1}{l^3} \int_{x=0}^{x=L} x dx = \frac{1}{l^3} \left[\frac{1}{2} x^2\right]_{x=0}^{x=l} = \frac{1}{2} = 0{,}500 \tag{A.56}$$

Dvs. samma faktor κ_F oavsett randvillkor för en balk med plastisk respons. Slutligen fås då för en balk belastad med punktlast

$$\kappa_{mF} = \frac{\kappa_m}{\kappa_F} = \frac{0{,}333}{1{,}000} = 0{,}333 \tag{A.57}$$

och för en balk belastad med utbredd last

$$\kappa_{mF} = \frac{\kappa_m}{\kappa_F} = \frac{0{,}333}{0{,}500} = 0{,}667 \tag{A.58}$$

Bilaga B Centrala differensmetoden

B.1 Numerisk lösningsmetod

Central differensmetod är en explicit lösningsmetod för att lösa den dynamiska grundekvationen

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F(t) \tag{B.1}$$

där m, c, k och $F(t)$ är massa, dämpning, styvhet respektive yttre last samt $\ddot{u}$, $\dot{u}$ och u är acceleration, hastighet respektive förskjutning.

Med explicit lösningsmetod menas att lösning av förskjutningen u vid tiden $t+\Delta t$, här betecknat som ${}^{t+\Delta t}u$, beräknas utgående från en jämvikt vid tiden t. Detta innebär att ekvation (B.1) kan skrivas som

$$m\,{}^{t}\ddot{u} + c\,{}^{t}\dot{u} + k\,{}^{t}u = F(t) \tag{B.2}$$

där indexet anger tidpunkten som den aktuella parametern tillhör. Så till exempel syftar ${}^{t}\ddot{u}$ på accelerationen vid tiden t och ${}^{t+\Delta t}\dot{u}$ på hastigheten vid tiden $t+\Delta t$. Massan m, dämpningen c och styvheten k gäller samtliga för tiden t, dvs. $m = {}^{t}m$, $c = {}^{t}c$ samt $k = {}^{t}k$.

I central differensmetod ansätts accelerationen vid tiden t till

$${}^{t}\ddot{u} = \frac{1}{\Delta t^2}\left({}^{t+\Delta t}u - 2\,{}^{t}u + {}^{t-\Delta t}u\right) \tag{B.3}$$

och hastigheten vid tiden t till

$${}^{t}\dot{u} = \frac{1}{2\Delta t}\left({}^{t+\Delta t}u - {}^{t-\Delta t}u\right) \tag{B.4}$$

vilket insatt i ekvation (B.2) ger att förskjutningen vid tiden $t+\Delta t$ kan skrivas som

$${}^{t+\Delta t}u = \left(\frac{{}^{t}m}{\Delta t^2} + \frac{{}^{t}c}{2\Delta t}\right)^{-1}\left(F(t) - \left[{}^{t}k - \frac{2\,{}^{t}m}{\Delta t^2}\right]{}^{t}u - \left[\frac{{}^{t}m}{\Delta t^2} - \frac{{}^{t}c}{2\Delta t}\right]{}^{t-\Delta t}u\right) \tag{B.5}$$

Det kan noteras att samtliga termer i högerledet är från tiden t eller $t-\Delta t$, vilket innebär att förskjutningen ${}^{t+\Delta t}u$ kan lösas ut direkt från redan känd information. Sätts dämpningen till noll, ${}^{t}c = 0$, vilket för en impulsbelastad konstruktion är en rimlig approximation på säker sida, så kan ekvation (B.5) förenklas till

$${}^{t+\Delta t}u = \Delta t^2\,{}^{t}m^{-1}\left(F(t) - \left[{}^{t}k - \frac{2\,{}^{t}m}{\Delta t^2}\right]{}^{t}u - \frac{{}^{t}m}{\Delta t^2}\,{}^{t-\Delta t}u\right) \tag{B.6}$$

Av ekvation (B.5) och (B.6) framgår att centrala differensmetoden inte är självstartande eftersom det vid beräkning av förskjutningen ${}^{\Delta t}u$ i det första tidssteget behövs information om förskjutningen vid tiden $-\Delta t$. För att lösa detta används ett särskilt startsteg vilket uttrycks som

$$ {}^{-\Delta t}u = {}^{0}u - \Delta t\,{}^{0}\dot{u} + \frac{\Delta t^2}{2}\,{}^{0}\ddot{u} \tag{B.7} $$

och som behöver användas i en numerisk beräkning för att kunna starta analysen.

B.2 Anpassning till olinjär respons

I avsnitt B.1, ekvation (B.6), ges ett uttryck för att beräkna förskjutningen ${}^{t+\Delta t}u$ utgående från information i föregående tidssteg t och $t-\Delta t$. Vid härledning av detta uttryck har en linjärelastisk materialrespons förutsatts i form av styvheten k. Det är dock relativt enkelt att även nyttja dessa uttryck för ett fall med olinjär materialrespons. Eftersom styvheten $k = {}^{t}k$ anges för tiden t vid beräkning av förskjutningen vid tiden $t+\Delta t$ så är det möjligt att använda en sekantstyvhet för att beskriva en olinjär respons. Genom att låta ${}^{t}k = {}^{t}k({}^{t}u) = k(u(t))$, dvs. styvheten vid tiden t är en funktion av aktuell respons $u(t)$, så kan en godtycklig materialrespons beräknas.

För ett system med elastisk respons så gäller för styvheten att

$$ {}^{t}k = k = \text{konstant} \tag{B.8} $$

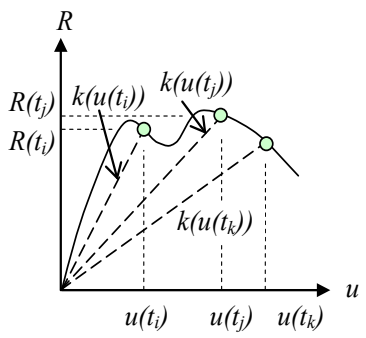
medan den för ett system med godtycklig respons istället utgör sekantstyvheten i aktuellt tidssteg såsom illustreras i Figur B.1, dvs.

$$ {}^{t_i}k \neq {}^{t_j}k \neq {}^{t_k}k \tag{B.9} $$

Det som egentligen är av intresse att beskriva med ${}^{t}k$ i ekvation (B.6) är inte styvheten som sådan utan den inre kraft

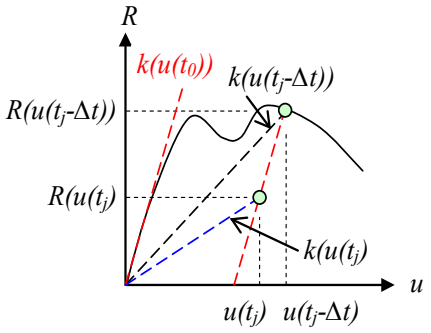
$$ {}^{t}R = {}^{t}k \cdot {}^{t}u \tag{B.10} $$

som är verksam i tidssteget t.



Figur B.1 Tangentstyvhet k vid tiden t för system med godtycklig respons.

På samma sätt kan styvheten på avlastningen anpassas efter önskat fall. Genom att i beräkningarna hålla reda på om aktuell styvhet ska motsvara en av- eller pålastning kan styvheten anpassas efter aktuellt förhållande. Exempelvis är det möjligt att för en plastisk respons låta av- och pålastningen motsvara en önskad linjärelastisk styvhet för att vid en ökad deformation, med växande plastiska töjningar, låta aktuell sekantstyvhet ta över. I Figur B.2illustreras hur en avlastning sker vid tiden t_j. För ett system med plastiska egenskaper kommer en sådan avlastning ske med en styvhet motsvarande den inledande tangentstyvheten, dvs. med styvhet $k(u(t_0))$. Efter en elastisk avlastning från förskjutning $u(t_j\text{-}\Delta t)$ till $u(t_j)$ ska i nästa tidssteg, $t_j+\Delta t$, en styvhet $k(u(t_j))$ användas i ekvation (B.6) för att korrekt beskriva den inre kraft $R(u(t_j))$ som verkar i systemet för att beräkna förskjutningen $u(t_j+\Delta t)$.



Figur B.2 Styvhet vid avlastning för system med plastiska egenskaper.

B.3 Stabilitet

Att en lösning är stabil innebär att felaktigheter i begynnelsevillkoren, på grund av exempelvis avrundningsfel, inte växer i den fortsatta beräkningen. Om nyttjat tidssteg är för stort, $\Delta t \geq \Delta t_{kr}$, fås ett fel som växer till sådana proportioner att lösningen snabbt blir oanvändbar.

Centrala differensmetoden är villkorligt stabil vilket innebär att tidssteget Δt måste understiga ett sådant minsta kritiskt tidssteg Δt_{kr} för att en acceptabel lösning ska erhållas. Detta kritiska tidssteg kan uttryckas som

$$\Delta t_{kr} = \frac{2}{\omega} = 2\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{B.11}$$

Uppfylls inte detta villkor fungerar inte lösningsmetoden. Det ska dock poängteras att det av noggrannhetsmässiga skäl, framförallt för ett enfrihetsgradsystem, kan vara nödvändigt med ett betydligt mindre tidssteg. Vilket tidssteg som är lämpligt i ett givet fall beror på en kombination av lastens utformning och systemets responstid men ett tidssteg av en storleksordning motsvarande en hundradel av lastens varaktighet fungerar ofta bra. Dvs. valt tidssteg Δt_1 bör uppfylla

$$\Delta t_1 \leq \begin{cases} \Delta t_{kr} \\ \dfrac{t_1}{100} \end{cases} \tag{B.12}$$

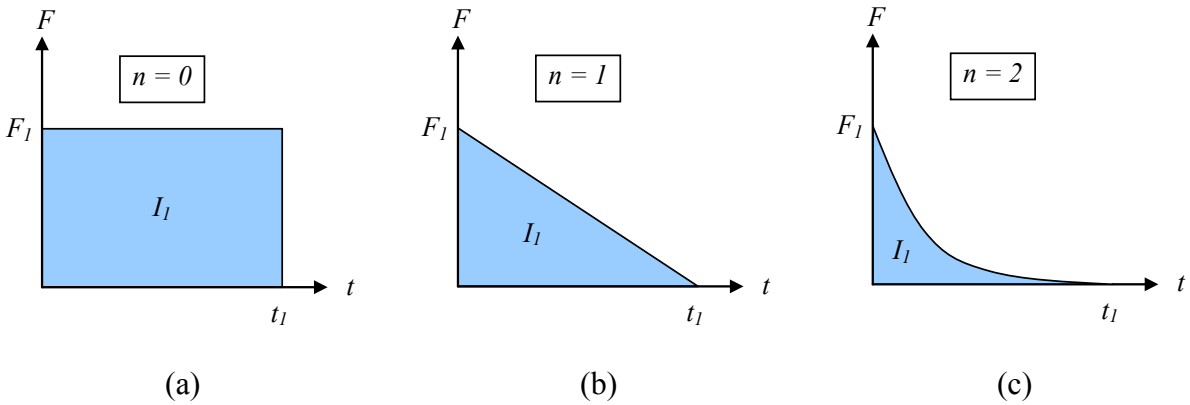
där t_1 är lastens varaktighet.

Bilaga C Skadekurvor

C.1 Förutsättningar

Här redovisade skadekurvor är framtagna för ett last-tidssamband enligt ekvation (C.1), illustrerat i Figur C.1, för ett system med elastisk eller plastisk respons.

$$F(t) = F_1\left(1 - \frac{t}{t_1}\right)^n \quad , n = 0,\ 1,\ 2 \tag{C.1}$$



Figur C.1 Last-tidssamband som används vid framtagning av skadekurvor: (a) rektangulär last, (b) triangulär last, (c) kvadratiskt avtagande last. Faktorn n anger hur lasten avtar med tiden enligt ekvation (C.1).

I avsnitt C.2 och C.3 visas kombinationer av γ_F och γ_I för elastiskt respektive plastiskt system. Faktorerna γ_F och γ_I definieras som

$$\gamma_F = \frac{F_k}{F_1} \tag{C.2}$$

$$\gamma_I = \frac{I_k}{I_1} \tag{C.3}$$

där F_k och I_k är karakteristisk trycklast och impulslast enligt Figur 4.2 samt F_1 och I_1 är maximaltryck respektive resulterande impuls för aktuell dynamisk last.

C.2 Elastisk respons

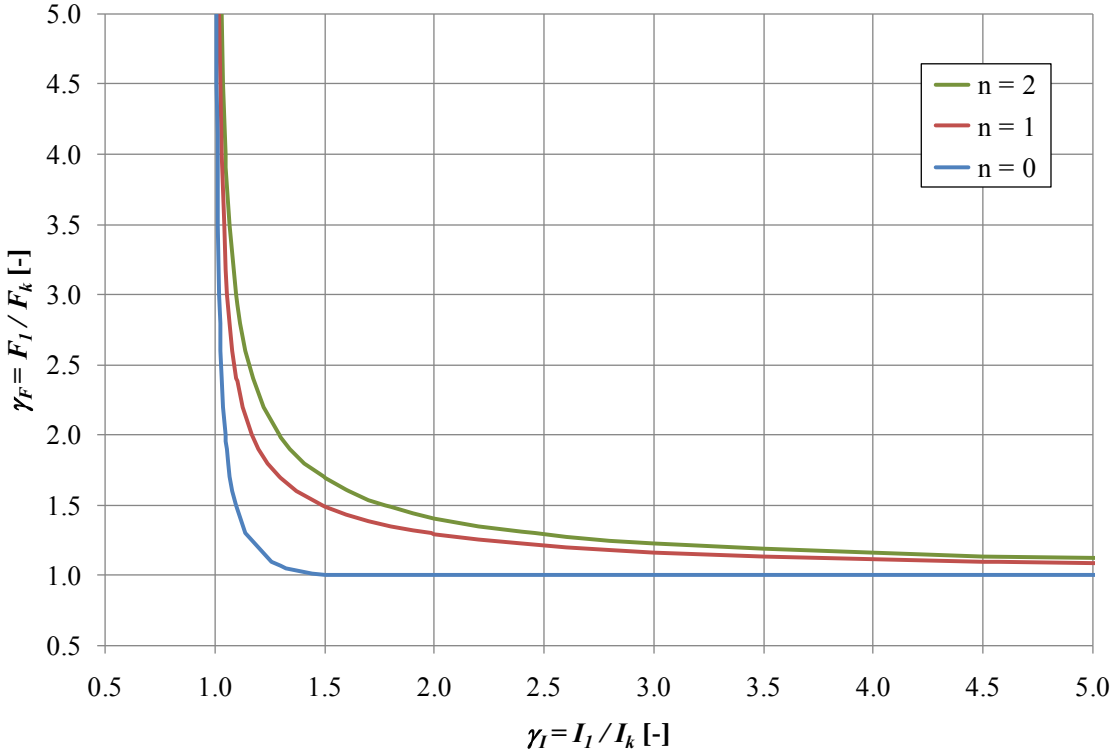
I Tabell C.1 och Tabell C.2 ges en sammanställning av kombinationer mellan av γ_F och γ_I för ett system med elastisk respons. I Figur C.2 illustreras tabellernas innehåll grafiskt.

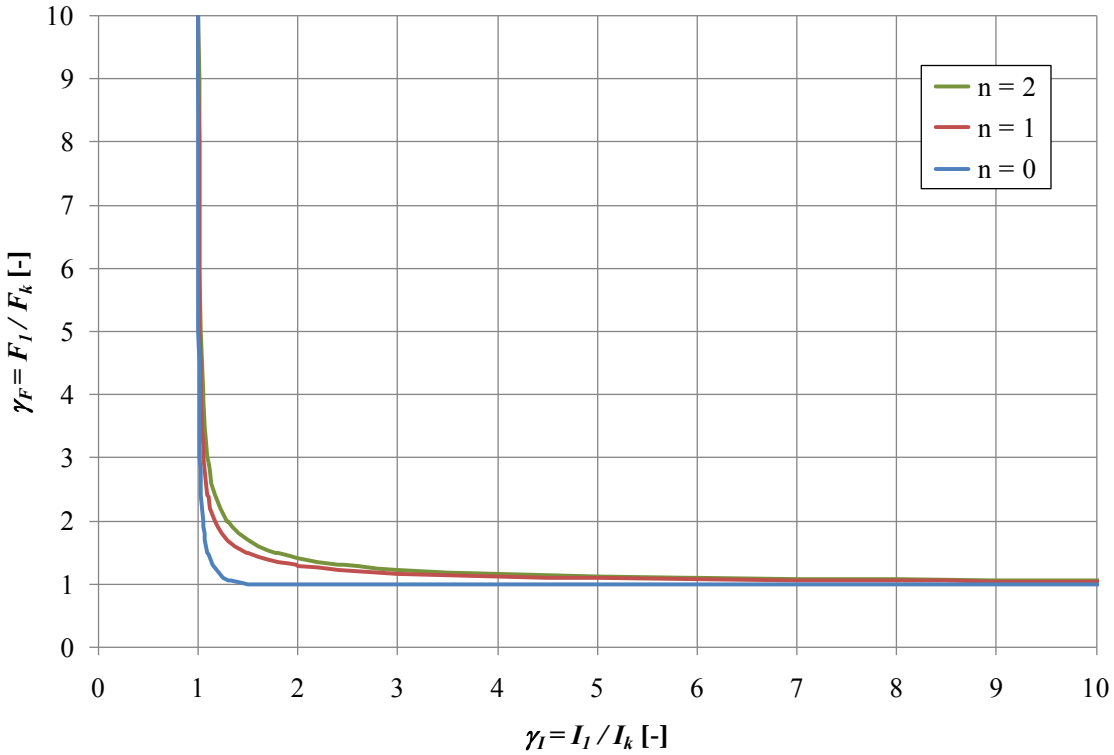
Tabell C.1 Skadetabell för elastisk respons, givet γ_F. Last enligt Figur C.1.

$\gamma_F = F_1 / F_k$	$\gamma_I = I_I / I_k$ $n = 0$	$\gamma_I = I_I / I_k$ $n = 1$	$\gamma_I = I_I / I_k$ $n = 2$
1,01	1,4443	41,1300	64,1464
1,05	1,3240	8,4908	11,1723
1,1	1,2552	4,5700	5,9301
1,3	1,1409	1,9835	2,4553
1,5	1,0946	1,4897	1,7756
1,6	1,0802	1,3732	1,6098
1,7	1,0691	1,2937	1,4935
1,8	1,0603	1,2372	1,4082
1,9	1,0531	1,1961	1,3433
2	1,0472	1,1656	1,2927
2,2	1,0381	1,1247	1,2198
2,4	1,0315	1,0985	1,1709
2,6	1,0264	1,0804	1,1367
2,8	1,0226	1,0671	1,1120
3	1,0195	1,0570	1,0937
3,5	1,0141	1,0402	1,0643
4	1,0107	1,0300	1,0474
4,5	1,0084	1,0233	1,0369
5	1,0068	1,0187	1,0291
6	1,0047	1,0128	1,0197
7	1,0034	1,0093	1,0145
8	1,0026	1,0071	1,0108
9	1,0021	1,0056	1,0085
10	1,0017	1,0045	1,0069
20	1,0004	1,0011	1,0020
30	1,0002	1,0005	1,0009
40	1,0000	1,0003	1,0003
50	1,0000	1,0002	1,0006
75	1,0000	1,0001	0,9998
100	1,0000	1,0000	1,0001

Tabell C.2 Skadetabell för elastisk respons, givet γ_I. Last enligt Figur C.1.

$\gamma_I = I_1 / I_k$	$\gamma_F = F_1 / F_k$ $n = 0$	$\gamma_F = F_1 / F_k$ $n = 1$	$\gamma_F = F_1 / F_k$ $n = 2$
1,01	4,1437	6,8128	8,5247
1,05	1,9588	3,1771	3,9107
1,1	1,4687	2,3892	2,9240
1,3	1,0650	1,6906	1,9840
1,5	1,0029	1,4929	1,6935
1,6	1,0000	1,4337	1,6073
1,7	1,0000	1,3880	1,5409
1,8	1,0000	1,3513	1,4882
1,9	1,0000	1,3213	1,4451
2	1,0000	1,2961	1,4091
2,2	1,0000	1,2563	1,3526
2,4	1,0000	1,2261	1,3100
2,6	1,0000	1,2024	1,2767
2,8	1,0000	1,1832	1,2499
3	1,0000	1,1674	1,2280
3,5	1,0000	1,1377	1,1869
4	1,0000	1,1171	1,1585
4,5	1,0000	1,1018	1,1376
5	1,0000	1,0901	1,1216
6	1,0000	1,0733	1,0986
7	1,0000	1,0617	1,0831
8	1,0000	1,0533	1,0716
9	1,0000	1,0470	1,0631
10	1,0000	1,0420	1,0562
12	1,0000	1,0346	1,0463
14	1,0000	1,0294	1,0395
16	1,0000	1,0256	1,0346
18	1,0000	1,0227	1,0307
20	1,0000	1,0204	1,0277
30	1,0000	1,0140	1,0188
40	1,0000	1,0104	1,0139
50	1,0000	1,0084	1,0146
75	1,0000	1,0098	1,0071
100	1,0000	1,0046	1,0129





Figur C.2 Skadekurva för system med elastisk respons av last enligt Figur C.1.

C.3 Plastisk respons

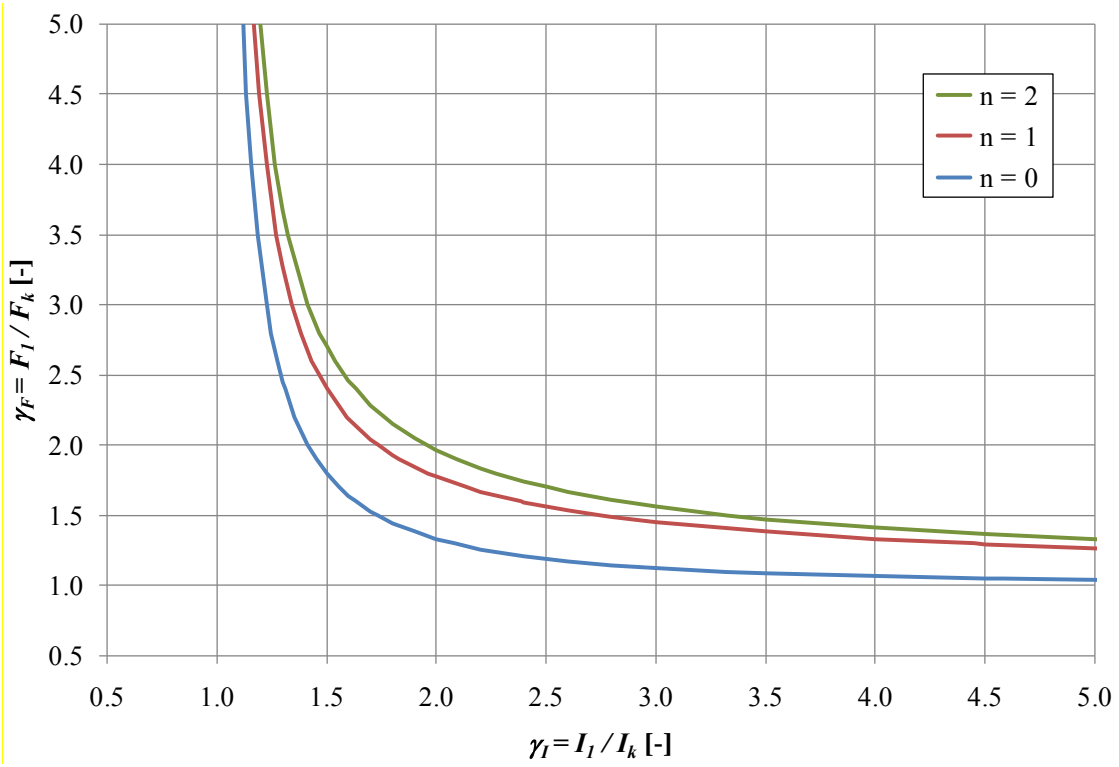
I Tabell C.3 och Tabell C.4 ges en sammanställning av kombinationer mellan av γ_F och γ_I för ett system med plastisk respons. I Figur C.3 illustreras tabellernas innehåll grafiskt.

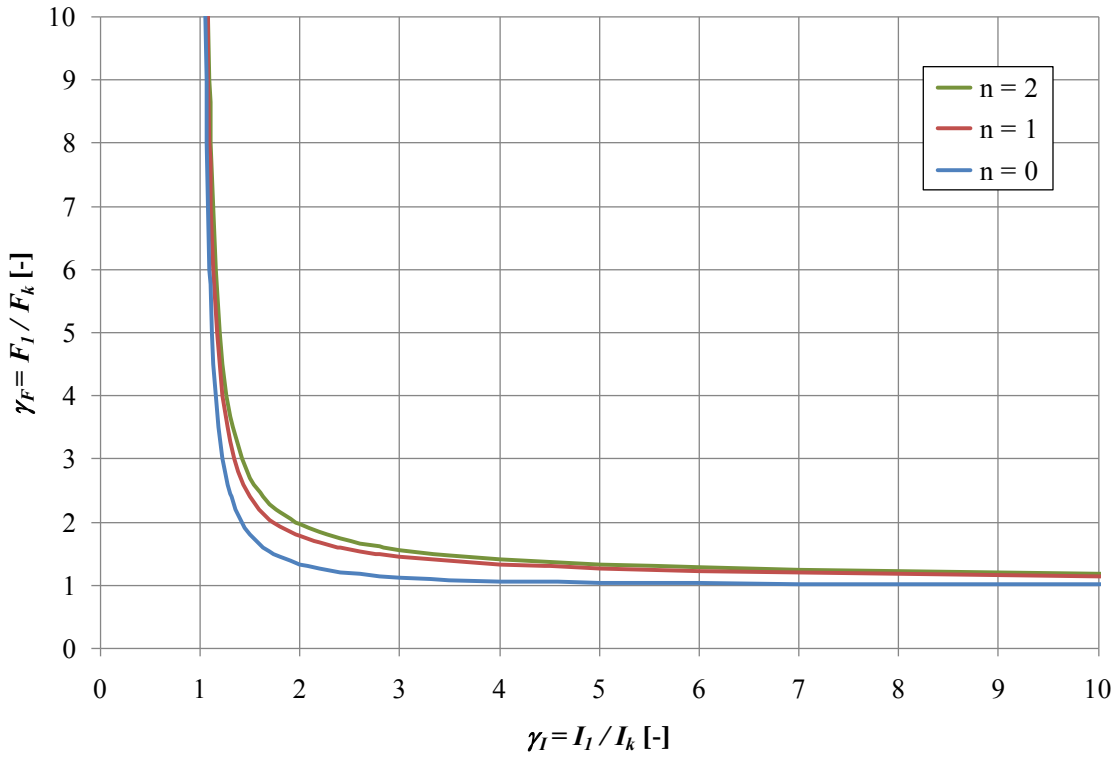
Tabell C.3 Skadetabell för plastisk respons, givet γ_F. Last enligt Figur C.1.

$\gamma_F = F_1 / R$	$\gamma_I = I_I / I_k$ $n = 0$	$\gamma_I = I_I / I_k$ $n = 1$	$\gamma_I = I_I / I_k$ $n = 2$
1,01	10,0499	441,7830	587,5321
1,05	4,5826	42,8661	56,2511
1,1	3,3166	16,5711	21,5754
1,3	2,0817	4,4536	5,5685
1,5	1,7321	2,7558	3,3302
1,6	1,6330	2,3851	2,8390
1,7	1,5584	2,1368	2,5075
1,8	1,5000	1,9607	2,2704
1,9	1,4530	1,8308	2,0936
2	1,4142	1,7321	1,9572
2,2	1,3540	1,5933	1,7621
2,4	1,3093	1,5000	1,6307
2,6	1,2748	1,4327	1,5371
2,8	1,2472	1,3817	1,4676
3	1,2247	1,3416	1,4142
3,5	1,1832	1,2718	1,3238
4	1,1547	1,2247	1,2655
4,5	1,1339	1,1925	1,2247
5	1,1180	1,1677	1,1956
6	1,0954	1,1339	1,1547
7	1,0801	1,1114	1,1283
8	1,0690	1,0954	1,1095
9	1,0607	1,0835	1,0954
10	1,0541	1,0742	1,0847
12	1,0445	1,0607	1,0690
14	1,0377	1,0513	1,0583
16	1,0328	1,0445	1,0505
18	1,0290	1,0392	1,0445
20	1,0260	1,0351	1,0398
30	1,0171	1,0230	1,0260
40	1,0127	1,0171	1,0193
50	1,0102	1,0136	1,0153
75	1,0067	1,0090	1,0102
100	1,0050	1,0067	1,0076

Tabell C.4 Skadetabell för plastisk respons, givet γ_I. Last enligt Figur C.1.

$\gamma_I = I_1 / I_k$	$\gamma_F = F_1 / F_k$ $n = 0$	$\gamma_F = F_1 / F_k$ $n = 1$	$\gamma_F = F_1 / F_k$ $n = 2$
1,01	50,7534	67,6723	76,1301
1,05	10,7579	14,3438	16,1368
1,1	5,7633	7,6884	8,6449
1,3	2,4516	3,2693	3,6780
1,5	1,8000	2,4000	2,6997
1,6	1,6410	2,1881	2,4589
1,7	1,5291	2,0388	2,2855
1,8	1,4464	1,9285	2,1540
1,9	1,3832	1,8433	2,0503
2	1,3333	1,7748	1,9659
2,2	1,2604	1,6709	1,8366
2,4	1,2101	1,5951	1,7416
2,6	1,1736	1,5369	1,6684
2,8	1,1462	1,4906	1,6101
3	1,1250	1,4527	1,5624
3,5	1,0889	1,3823	1,4738
4	1,0667	1,3333	1,4122
4,5	1,0520	1,2970	1,3667
5	1,0417	1,2689	1,3316
6	1,0286	1,2279	1,2804
7	1,0208	1,1993	1,2448
8	1,0159	1,1780	1,2184
9	1,0125	1,1615	1,1981
10	1,0101	1,1483	1,1816
12	1,0070	1,1283	1,1569
14	1,0052	1,1138	1,1390
16	1,0039	1,1027	1,1255
18	1,0031	1,0939	1,1147
20	1,0025	1,0868	1,1058
30	1,0011	1,0644	1,0788
40	1,0006	1,0524	1,0637
50	1,0004	1,0448	1,0545
75	1,0002	1,0338	1,0409
100	1,0001	1,0277	1,0337





Figur C.3 Skadekurva för system med plastisk respons av last enligt Figur C.1.

Bilaga D Beräkningsexempel

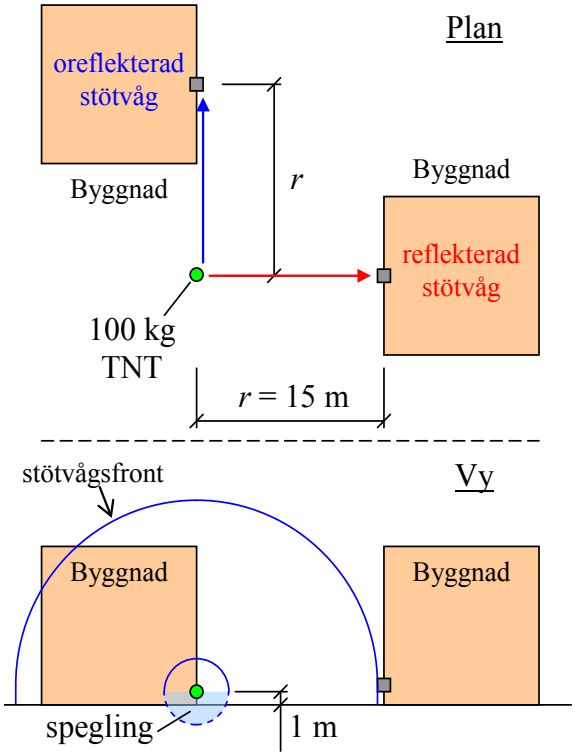
D.1 Orientering

I denna bilaga gås ett enklare beräkningsexempel igenom för att belysa hur resulterande last tas fram för en explosionsbelastning, hur denna appliceras på ett enfrihetsgradsystem (SDOF-modell) samt vilken förskjutning som erhålls av denna. Slutligen bestäms ekvivalent statisk last och en kapacitetskontroll görs.

Teoretisk bakgrund för här utförda beräkningar behandlas dels i kapitel 4 men även i Johansson och Laine (2007) och för att få full överblick av här gjorda resonemang hänvisas till denna.

D.2 Förutsättningar

I Figur D.1 illustreras studerat belastningsfall. En laddning, motsvarande 100 kg TNT, antas explodera 1 m ovan marknivå. I närheten av laddningen står två byggnader som kommer utsättas för last av varierande storlek. Här studeras två renodlade fall – effekten av det tryck som fås från en normalreflekterad stötvåg samt trycket för en oreflekterad stötvåg på samma avstånd r = 15 m.



Figur D.1 En laddning motsvarande 100 kg TNT, placerad 1 m ovan mark, exploderar och utsatta byggnadsdelar på ett avstånd r = 15 m från laddningen studeras.

D.3 Lastbestämning

D.3.1 Skalat avstånd Z

Det skalade avståndet Z är en parameter som beskriver styrkan hos en explosion och definieras som

$$Z = \frac{r}{W^{1/3}} \tag{D.1}$$

där r är det verkliga avståndet och W symboliserar explosionens energimängd uttryckt i mängd sprängämne (vanligen i kg TNT), se Johansson och Laine (2007). För här studerat fall uppgår laddningsvikten till 100 kg TNT och avståndet r till 15 m. I och med att laddningen är placerad nära marken i förhållande till avståndet till studerad punkt (1 m höjd jämfört med ett avstånd på 15 m) så kommer den resulterande stötvågens utbredning i princip begränsas till en halvsfärisk utbredning såsom illustreras i Figur D.1. Dvs. ett fenomen motsvarande såkallad spegling uppstår vilket innebär att frisläppt energi koncentreras till en mindre volym. Detta innebär att laddningsvikten W_{mod} kan räknas upp med en faktor α

$$W_{\text{mod}} = \alpha \cdot W \tag{D.2}$$

för att beakta den energikoncentration som denna förhindrade volymutbredning innebär. För fall med perfekt reflexion mot marken blir $\alpha = 2{,}0$ men eftersom viss energimängd i verkligheten går ner i marken fås i praktiken ett lägre värde. Här används $\alpha = 1.8$ i enlighet med rekommendationer från Baker (1973) vilket innebär en modifierad laddningsvikt

$$W_{\text{mod}} = 1{,}8 \cdot 100 = 180\,\text{kg TNT} \tag{D.3}$$

Varvid det skalade avståndet kan beräknas till

$$Z = \frac{15}{180^{1/3}} = 2{,}66\ \text{m/kg}^{1/3} \tag{D.4}$$

D.3.2 Resulterande stötvågsparametrar

Utgående från det skalade avståndet kan aktuella stötvågsparametrar bestämmas från samband i Bilaga E. I Tabell D.1 redovisas de närliggande värden som fås ur Tabell E.1 samt det slutliga värdet som bestäms utgående från dessa med användande av linjär interpolation[5] enligt

$$S = S_1 + \frac{(S_1 - S_2)}{(Z_1 - Z_2)} \cdot (Z - Z_1) \tag{D.5}$$

där S är sökt stötvågsparameter för aktuellt Z, S_1 och Z_1 är värde på stötvågsparameter respektive skalat avstånd för punkt 1 och S_2 och Z_2 är värde på stötvågsparameter respektive skalat avstånd för punkt 2. I Figur D.2 till Figur D.4 illustreras framtagning av aktuella stötvågsparametrar ur diagram.

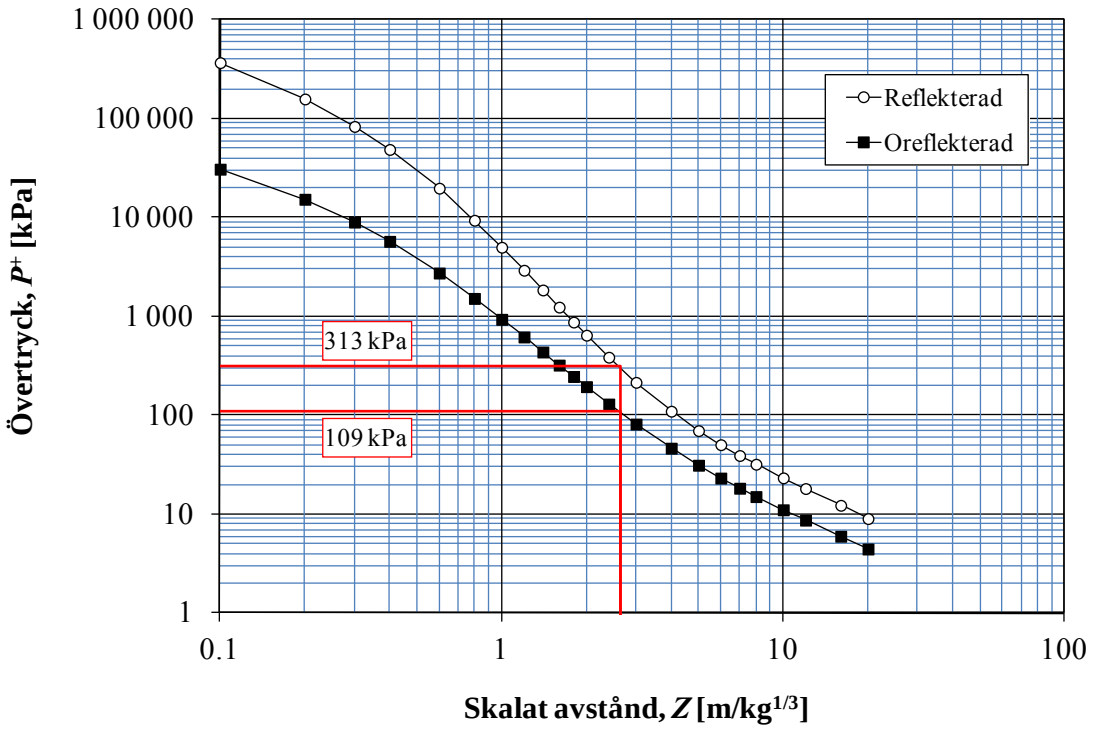
[5] Logaritmisk interpolation är mer riktigt men här använd metod ger tillräcklig noggrannhet.

Det ska noteras att givna impulstätheter och tider är skalade med hänsyn till laddningens storlek och att en multiplikation av $W^{1/3} = 180^{1/3} = 5{,}65\ \mathrm{kg}^{1/3}$ är nödvändig för att få fram aktuella värden på dessa, något som också redovisas i Tabell D.1.

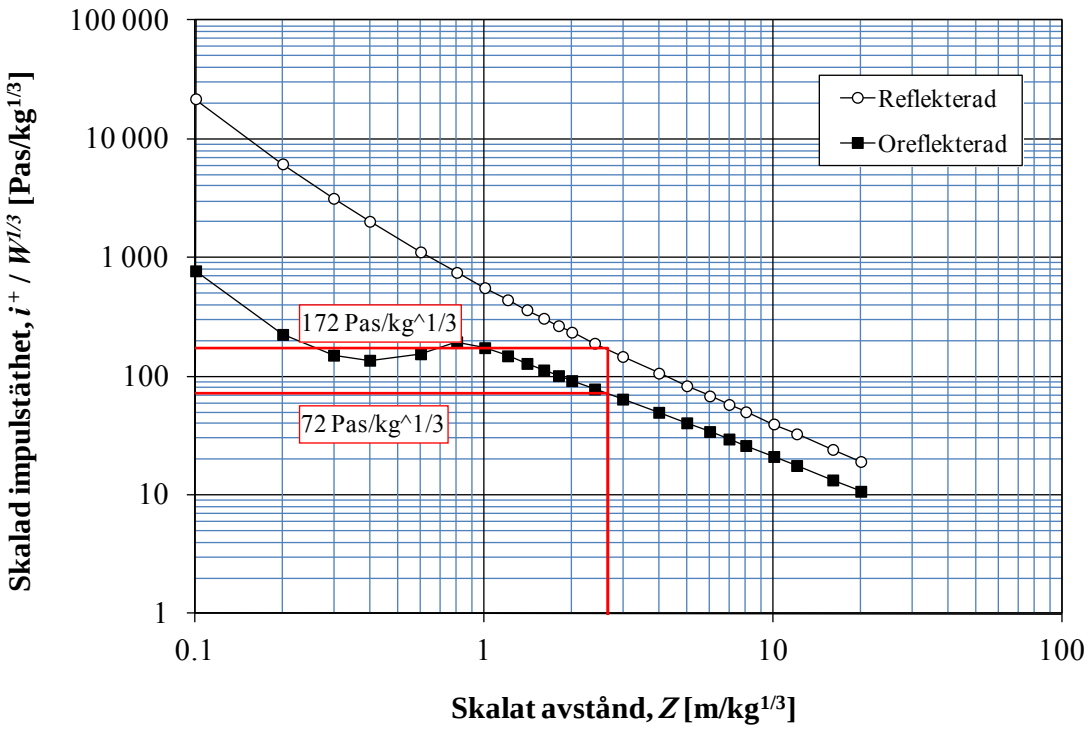
Tabell D.1 Stötvågsparametrar för studerat lastfall. Värden i kolumn för Punkt 1 och Punkt 2 har hämtats från Tabell E.1. Resulterande stötvågsparametrar har från dessa sedan beräknats med linjär interpolation enligt ekvation (D.5).

Parameter	Enhet	Punkt 1	Punkt 2	Resultat
Z	[m/kg$^{1/3}$]	2,4	3,0	2,66
P_s^+	[kPa]	130	82	109
P_r^+	[kPa]	387	216	314
$i_s^+ / W^{1/3}$	[Pas/kg$^{1/3}$]	78	64	72
$i_r^+ / W^{1/3}$	[Pas/kg$^{1/3}$]	190	147	172
$t_a / W^{1/3}$	[ms/kg$^{1/3}$]	2,70	3,99	3,25
$t^+ / W^{1/3}$	[ms/kg$^{1/3}$]	2,27	2,68	2,45

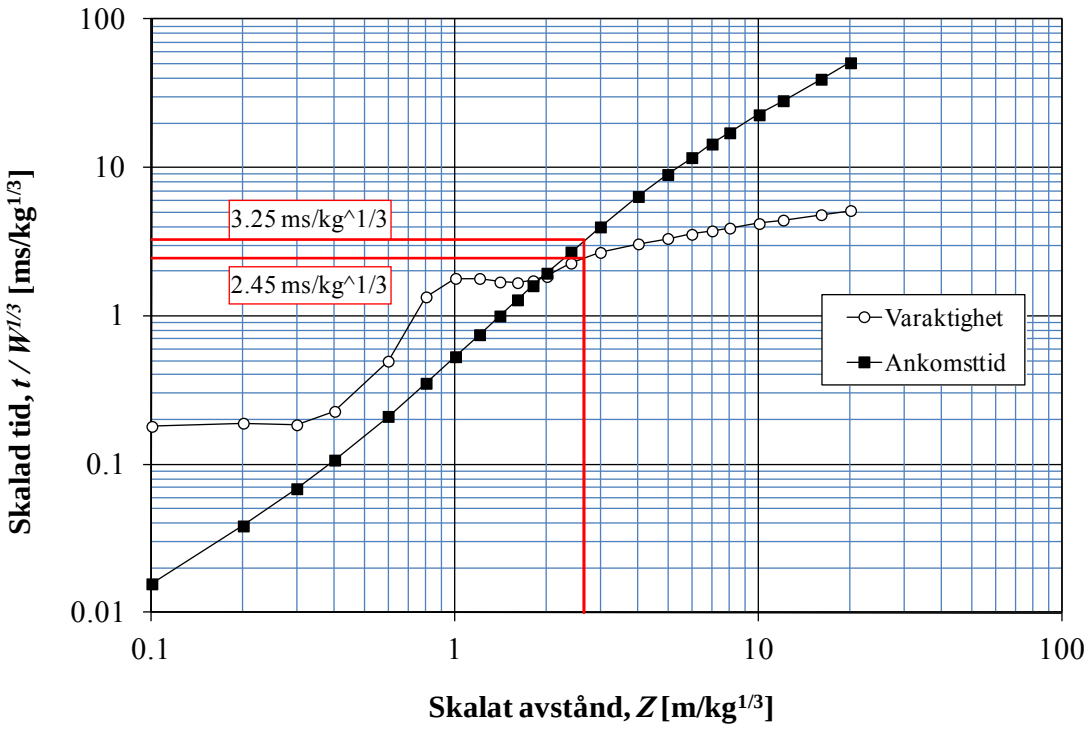
Parameter	Enhet	Resultat
Z	[m/kg$^{1/3}$]	2,66
P_s^+	[kPa]	109
P_r^+	[kPa]	314
i_s^+	[Pas]	408
i_r^+	[Pas]	970
t_a	[ms]	18,36
t^+	[ms]	13,82



Figur D.2 Bestämning av reflekterat och oreflekterat övertryck för det skalade avståndet $Z = 2{,}66\ \mathrm{m/kg}^{1/3}$.



Figur D.3 *Bestämning av reflekterad och oreflekterad skalad impulstäthet för det skalade avståndet Z = 2,66 m/kg$^{1/3}$.*



Figur D.4 *Bestämning av skalad ankomsttid och skalad varaktighet för det skalade avståndet Z = 2,66 m/kg$^{1/3}$.*

D.3.3 Bestämning av last

Utgående från framtagna stötvågsparametrar i Tabell D.1 kan det slutliga utseendet på explosionslasten bestämmas. För detta används uttryck i Bilaga E från vilka en avklingningsfaktor α bestäms från ekvation (E.3) och aktuell tryck-tidssamband från ekvation (E.2). Vid antagande om ett linjärt avtagande tryck bestäms varaktigheten från ekvation (E.4) varvid den fiktiva varaktigheten för den reflekterade stötvågen blir

$$t_{r,\Delta}^{+} = \frac{2i_r^{+}}{P_r^{+}} = \frac{2 \cdot 970}{314} = 6{,}2\ \text{ms} \tag{D.6}$$

och för den oreflekterade stötvågen

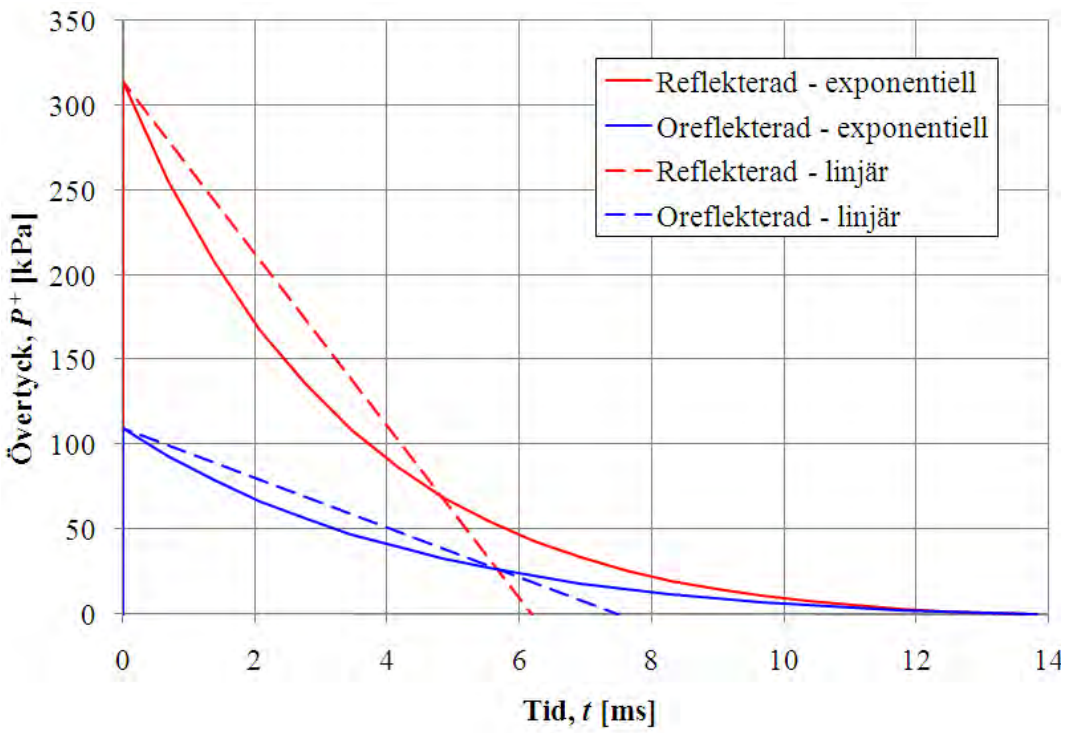
$$t_{s,\Delta}^{+} = \frac{2i_s^{+}}{P_s^{+}} = \frac{2 \cdot 408}{109} = 7{,}5\ \text{ms} \tag{D.7}$$

I Tabell D.2 sammanställs aktuella stötvågsparametrar för reflekterad och oreflekterad belastning när exponentiell respektive linjär tryckminskning antas och utgående från dessa kan sedan tryck-tidssambanden i Figur D.5 upprättas. Det kan noteras att den fiktiva varaktigheten t_Δ^+ för reflekterad och oreflekterad stötvåg skiljer sig åt medan varaktigheterna för exponentiellt avtagande tryckkurva är desamma. Det senare är fysikaliskt korrekt. I det förenklade tryck-tidssambandet med varaktighet t_Δ^+ fås dock en skillnad eftersom impulstätheten inte ökar lika mycket som övertrycket vid en övergång från oreflekterad till reflekterad stötvåg.

Tabell D.2 Stötvågsparametrar för reflekterad och oreflekterad belastning vid antagande om exponentiellt avtagande tryck, enligt ekvation (E.2) samt linjärt avtagande tryck enligt ekvation (E.4).

Exponentiellt avtagande tryck				Linjärt avtagande tryck			
Oreflekterad stötvåg		Reflekterad stötvåg		Oreflekterad stötvåg		Reflekterad stötvåg	
P_s^+	109 kPa	P_r^+	314 kPa	P_s^+	109 kPa	P_r^+	314 kPa
i_s^+	408 Pas	i_r^+	970 Pas	i_s^+	408 Pas	i_r^+	970 Pas
t_s^+	13,82 ms	t_r^+	13,82 ms	$t_{s,\Delta}^+$	7,5 ms	$t_{r,\Delta}^+$	6,2 ms
α	2,21	α	3,09				

Det ska poängteras att vid användande av de samband för en balks deformation samt ekvivalent statisk last som presenteras i avsnitt D.5 så används enbart värdet på impulstätheten i_s^+ och i_r^+. Dvs. det utgås där från att aktuellt tryck-tidssamband kan betraktas som en karakteristisk impulslast, vilket är ett konservativt antagande som resulterar i en kontroll på säker sida. Framtagning av övriga parametrar redovisas för fullständighetens skull och ger även möjlighet till en förfinad kontroll av resulterande deformationer via nyttjande av en numerisk beräkning med användande av exempelvis centrala differensmetoden som behandlas i Bilaga A eller via de förenklade samband för modifiering av impulslasten som ges i avsnitt 4.5, se avsnitt D.6.



Figur D.5 Tryck-tidssamband för reflekterad och oreflekterad stötvåg när exponentiellt respektive linjärt tryckavtagande antas, se Tabell D.2. Samband för reflekterad och oreflekterad belastning har samma tryck och impulstäthet men olika varaktighet.

D.4 Egenskaper hos byggnad

D.4.1 Orientering

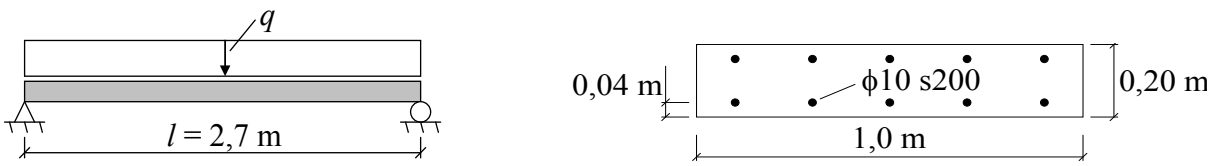
Kontroll av byggnadsdel utförs här utgående från ett enfrihetsgradsystem vilket innebär att last samt egenskaper hos studerad balk omvandlas till ett sådant system. I enlighet med vad som anges i avsnitt 4.6 så innebär detta dock att det räcker att modifiera balkens totala massa m_b med en faktor κ_{mF} medan styvheten k_b och lasten F_b är desamma, dvs.

$$\kappa_{mF} m_b \ddot{u} + k_b u = F_b(t) \tag{D.8}$$

Värden tas fram för tre olika fall – osprucket (stadium I), sprucket (stadium II) samt plastisk respons (stadium III). Nedan används index *I*, *II* eller *III* för att särskilja egenskaperna för en balk i respektive stadium.

D.4.2 Geometri och material

Byggnad utsatt för de i avsnitt D.3.2 framtagna impulslasterna antas vara uppbyggd av flera våningar med inbördes avstånd 2,7 m. Väggarna består av betong med tjockleken 200 mm, är armerade med ϕ10 s200[6] samt antas vara fritt upplagda mot bjälklagen, se Figur D.6. Trycket approximeras vara detsamma över hela väggen varför en 1,0 m bred strimla studeras.



Figur D.6 Studerad balk i byggnad utsatt för explosionslast.

D.4.3 Massa

Balkens totala massa uppgår till

$$m_b = \rho \cdot b \cdot h \cdot l = 2400 \cdot 1{,}0 \cdot 0{,}20 \cdot 2{,}7 = 1296\,\text{kg} \tag{D.9}$$

Detta modifieras sedan med värdet på κ_{MF}, vilket för en fritt upplagd balk och antagande om en elastisk respektive plastisk respons enligt avsnitt 4.6 uppgår till

$$\kappa_{mF,I} = \kappa_{mF,II} = 0{,}788 \tag{D.10}$$

$$\kappa_{mF,III} = 0{,}667 \tag{D.11}$$

vilket ger att den ekvivalenta massan för elastisk respektive plastisk respons blir

$$m_I = m_{II} = 0{,}788 \cdot 1296 = 1021\,\text{kg} \tag{D.12}$$

$$m_{III} = 0{,}667 \cdot 1296 = 864\,\text{kg} \tag{D.13}$$

[6] Armering med diameter ϕ = 10 mm och centrumavstånd s = 200 mm.

D.4.4 Styvhet

Balkens styvhet för deformation i fältmitt av en utbredd last q fås från elementarfall, exempelvis Samuelsson och Wiberg (1988), och kan skrivas som

$$u = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EI} \tag{D.14}$$

vilket innebär att styvheten k kan tecknas som

$$k = \frac{Q}{u} = \frac{ql}{u} = \frac{384}{5} \cdot \frac{EI}{l^3} \tag{D.15}$$

Balkens tvärsnittsegenskaper kan beräknas enligt nedan. Generellt gäller att framtagna värden är något approximativa i den meningen att armering i osprucken betong inte beaktas. Skillnaden är liten och för att förenkla beräkningarna medtas inte detta.

För ett osprucket tvärsnitt fås ett tröghetsmoment

$$I_I = \frac{bh^3}{12} = \frac{1000 \cdot 200^3}{12} = 6{,}7 \cdot 10^8 \text{ mm}^4 \tag{D.16}$$

där b och h är balkens bredd respektive höjd.

Tröghetsmomentet för ett sprucket tvärsnitt beräknas med approximationen att normalkraften är noll, dvs. att ren böjning råder, varvid denna kan beräknas som

$$I_{II} = \frac{bx^3}{3} + \alpha A_s (d - x)^2 \tag{D.17}$$

där x är tvärsnittets tryckzonshöjd,

$$\alpha = \frac{E_s}{E_c} = \frac{200}{30} = 6{,}7 \tag{D.18}$$

är kvoten mellan armeringens och betongens elasticitetsmodul,

$$A_s = \frac{A_{\phi 10}}{s} = \frac{78{,}5}{0{,}200} = 393 \text{ mm}^2 \tag{D.19}$$

A_s är armeringsmängd och

$$d = h - c = 200 - 40 = 160 \text{ mm} \tag{D.20}$$

är effektiv höjd.

Tryckzonshöjden bestäms ur tyngdpunktssambandet för ett ekvivalent tvärsnitt

$$x = \frac{bx^2/2 + \alpha A_s d}{bx + \alpha A_s} \tag{D.21}$$

vilket kan skrivas om som

$$x^2 + \frac{2\alpha A_s}{b}(x - d) = 0 \tag{D.22}$$

Med ovan givna indata fås

$$x = -\frac{\alpha A_s}{b} + \sqrt{\left(\frac{\alpha A_s}{b}\right)^2 + \frac{2\alpha A_s d}{b}} = -\frac{6{,}7 \cdot 393}{1000} + \sqrt{\left(\frac{6{,}7 \cdot 393}{1000}\right)^2 + \frac{2 \cdot 6{,}7 \cdot 393 \cdot 160}{1000}} = 26\,\text{mm} \tag{D.23}$$

vilket insatt i ekvation (D.17) ger

$$I_{II} = \frac{1000 \cdot 26^3}{3} + 6{,}7 \cdot 393 \cdot (160 - 26)^2 = 5{,}3 \cdot 10^7\ \text{mm}^4 \tag{D.24}$$

Utgående från detta kan en styvhetskvot mellan osprucket och sprucket tvärsnitt bestämmas som

$$\eta = \frac{I_I}{I_{II}} = \frac{6.7 \cdot 10^8}{5{,}3 \cdot 10^7} = 12{,}6 \tag{D.25}$$

Dvs. en faktor $\eta = 12{,}6$ i styvhetsskillnad vilket får betecknas som ett stort värde. Styvheten hos studerad balk kan slutligen beräknas som

$$k_I = \frac{384}{5} \cdot \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 6{,}7 \cdot 10^8}{2700^3} = 7{,}8 \cdot 10^4\ \text{N/mm} = 7{,}8 \cdot 10^7\ \text{N/m} \tag{D.26}$$

$$k_{II} = \frac{384}{5} \cdot \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 5{,}3 \cdot 10^7}{2700^3} = 6{,}2 \cdot 10^3\ \text{N/mm} = 6{,}2 \cdot 10^6\ \text{N/m} \tag{D.27}$$

För en balk som uppvisar en rent plastisk respons, stadium III, finns det ingen styvhet att bestämma. Istället är det balkens inre motståndskraft R, baserad på dess momentkapacitet, som utgör dess avgörande egenskap. För ett rektangulärt tvärsnitt kan momentkapaciteten bestämmas som

$$M_{rd} = f_{st} A_s (d - 0{,}4x) \tag{D.28}$$

där tryckzonshöjden x beräknas som

$$x = \frac{f_{st} A_s}{0{,}8 f_{cc} b} \tag{D.29}$$

utgående från armeringsmängd A_s, dess flytgräns f_{st}, betongens tryckhållfasthet f_{cc} samt bredden b. Med utgångspunkt från indata i Figur D.6 fås

$$x = \frac{500 \cdot 393}{0{,}8 \cdot 22 \cdot 1000} = 11\,\text{mm} \tag{D.30}$$

vilket insatt i ekvation (D.28) ger

$$M_{rd} = 500 \cdot 393 \cdot (160 - 0{,}4 \cdot 11) = 30{,}6\,\text{kNm} \tag{D.31}$$

Utgående från konstruktionens momentkapacitet beräknas dess inre mothållande kraft R. För en fritt upplagd balk med längden l, belastad av en jämnt utbredd last q, gäller att maximalt fältmoment är

$$M_{sd} = \frac{ql^2}{8} \tag{D.32}$$

Genom att sätta $M_{rd} = M_{sd}$ kan den inre mothållande kraften R ur detta bestämmas som

$$R = ql = \frac{8M_{sd}}{l} = \frac{8 \cdot 30{,}6}{2{,}7} = 90\,\text{kN} \tag{D.33}$$

D.5 Förskjutning och snittkrafter

D.5.1 Förutsättningar

I avsnitt D.3.3 har resulterande impulstäthet verkande på studerad balk för reflekterad och oreflekterad stötvåg tagits fram. Vid beräkning av balkens maximala förskjutning och ekvivalent statisk last behövs dock den totala impulslasten som verkar på balken. Denna beräknas som

$$I = b \cdot l \cdot i = 1{,}0 \cdot 2{,}7 \cdot i = 2{,}7 \cdot i \tag{D.34}$$

och impulstäthet i och resulterande impulslast I på studerad balk sammanställs i Tabell D.3.

Tabell D.3 Impulstäthet och resulterande impulslast på studerad balk när denne utsätts för reflekterad respektive oreflekterad belastning.

Oreflekterad stötvåg		Reflekterad stötvåg	
i_s^+	408 Pas	i_r^+	970 Pas
I_s^+	1101 Ns	I_r^+	2619 Ns

I Tabell D.4 sammanställs massa och styvhet hos studerad balk, framtagna i avsnitt D.4.

Tabell D.4 Sammanställning av massa och styvhet hos studerad balk när denna betraktas vara helt osprucken, sprucken samt uppvisa ett rent plastiskt beteende.

Egenskap	Beteckning	Osprucken (stadium I)	Sprucken (stadium II)	Plastisk (stadium III)	Enhet
Massa	m	1021	1021	864	kg
Styvhet	k	$7{,}8 \cdot 10^7$	$6{,}2 \cdot 10^6$	-	N/m
Kapacitet	R	-	-	90	kN

D.5.2 Byggnad utsatt för reflekterad stötvåg

D.5.2.1 Förskjutning

För balk med elastisk respons fås den maximala resulterande förskjutningen som

$$u_{el} = \frac{I}{\sqrt{mk}} \tag{D.35}$$

vilket för osprucken balk (stadium I) ger

$$u_I = \frac{2619}{\sqrt{1021 \cdot 7{,}8 \cdot 10^7}} = 9{,}3 \text{ mm} \tag{D.36}$$

och för sprucken balk (stadium II)

$$u_{II} = \frac{2619}{\sqrt{1021 \cdot 6{,}2 \cdot 10^6}} = 32{,}9 \approx 33 \text{ mm} \tag{D.37}$$

För balk med plastisk respons (stadium III) fås den maximalt resulterande förskjutningen som

$$u_{pl} = \frac{I^2}{2Rm} \tag{D.38}$$

vilket med insatta värden ger

$$u_{III} = \frac{2619^2}{2 \cdot 90 \cdot 10^3 \cdot 864} = 43{,}8 \approx 44 \text{ mm} \tag{D.39}$$

D.5.2.2 Ekvivalent statisk last och resulterande moment

Ekvivalent statisk last kan för balk med elastisk respons beräknas som

$$q_{el} = \frac{ku_{el}}{l} \tag{D.40}$$

vilket med insatta värden för osprucken balk (stadium I) ger

$$q_I = \frac{7{,}8 \cdot 10^7 \cdot 9{,}3 \cdot 10^{-3}}{2{,}7} = 268\,\text{kN/m} \tag{D.41}$$

och för sprucken balk (stadium II)

$$q_{II} = \frac{6{,}2 \cdot 10^6 \cdot 33 \cdot 10^{-3}}{2{,}7} = 75\,\text{kN/m} \tag{D.42}$$

För balk med plastisk respons (stadium III) kan den ekvivalenta statiska lasten beräknas som

$$q_{pl} = \frac{R}{l} \tag{D.43}$$

vilket med insatta värden ger

$$q_{III} = \frac{90}{2{,}7} = 34\,\text{kN/m} \tag{D.44}$$

Utgående från dessa ekvivalenta statiska laster kan sedan det maximala fältmomentet beräknas enligt ekvation (D.32) och med insatta värden fås

$$M_I = \frac{268 \cdot 2{,}7^2}{8} = 244\,\text{kNm} \tag{D.45}$$

$$M_{II} = \frac{75 \cdot 2{,}7^2}{8} = 69\,\text{kNm} \tag{D.46}$$

$$M_{III} = \frac{34 \cdot 2{,}7^2}{8} = 31\,\text{kNm} \tag{D.47}$$

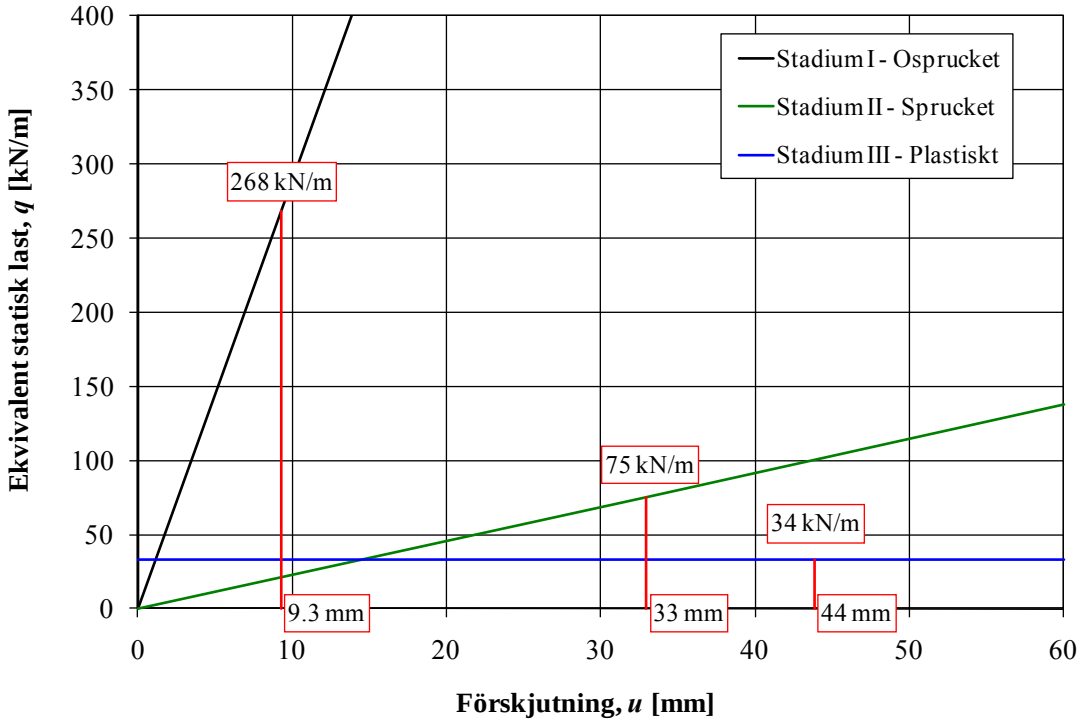
D.5.2.3 Sammanställning

I Tabell D.5 och Figur D.7 sammanställs resultat för studerad balk utsatt för reflekterad impulslast. Av detta framgår att en styv elastisk respons, stadium I, ger en mindre förskjutning men högre ekvivalent last än vad som fås för en balk med en vek elastisk respons, stadium II. För en plastisk respons, stadium III, blir detta förhållande än mer tydligt med en ökad förskjutning men minskad ekvivalent last som följd.

Det kan noteras att för stadium I och stadium II erfordras ekvivalenta laster som är större än kapaciteten i stadium III. I praktiken innebär detta att balken först kommer spricka upp och därefter plasticera. Med andra ord så är ett antagande om stadium I eller stadium II för studerad balk orealistiskt med hänsyn till den last som applicerats. Utförda beräkningar för dessa båda stadier ska därför främst ses som ett illustrativt exempel på vilken skillnad i respons som fås vid varierande styvhet hos impulsbelastad konstruktion.

Tabell D.5 Sammanställning av förskjutning, ekvivalent statisk last samt maximalt fältmoment för studerad balk när denna utsätts för en idealisk impulslast I_r^+ enligt Tabell D.3 och betraktas vara helt osprucken, sprucken eller uppvisa ett rent plastiskt beteende.

Egenskap	Beteckning	Stadium I (osprucken)	Stadium II (sprucken)	Stadium III (brott)	Enhet
Förskjutning	u	9,3	33	44	mm
Ekv. statisk last	q	268	75	34	kN/m
Max. fältmoment	M	244	69	31	kNm



Figur D.7 Sammanställning av ekvivalent statisk last q och maximal deformation u för studerad balk belastad av reflekterad stötvåg när balken antas befinna sig i stadium I, stadium II eller stadium III.

Arean under last-förskjutningskurvan i Figur D.7, den inre energiförbrukningen, är densamma vid elastisk respons:

$$W_{i,I} = \frac{268 \cdot 2{,}7 \cdot 9{,}3 \cdot 10^{-3}}{2} = 3365 \text{ Nm} \tag{D.48}$$

$$W_{i,II} = \frac{75 \cdot 2{,}7 \cdot 33}{2} = 3341 \text{ Nm} \tag{D.49}$$

För plastisk respons blir den inre energiförbrukningen något högre

$$W_{i,III} = 34 \cdot 2{,}7 \cdot 44 \cdot 10^{-3} = 3960 \text{ Nm} \tag{D.50}$$

vilket beror på att den effektiva massan för denna är lägre än vid elastisk respons, se Tabell D.4, och det yttre arbetet därför blir större. Dessa värden kan jämföras med det yttre arbete som förs på den impulsbelastade balken

$$W_y = E_k = \frac{I^2}{2m} \tag{D.51}$$

vilket för ett system med elastisk respons blir

$$W_{y,el} = \frac{2619^2}{2 \cdot 1021} = 3359 \text{ Nm} \tag{D.52}$$

och för ett system med plastisk respons blir

$$W_{y,pl} = \frac{2619^2}{2 \cdot 864} = 3969 \text{ Nm} \tag{D.53}$$

Dvs. energijämvikt råder med ett inre och yttre arbete som är lika stora – den avvikelse som syns beror på avrundning.

D.5.2.4 Kontroll av plastisk deformationsförmåga

För balk med elastisk respons behöver någon kontroll av deformationsförmågan inte göras. Där utgörs kontrollen istället av att beräknad lastkapacitet är tillräcklig. För en balk med plastisk respons är lastkapaciteten dock låst och kapacitetskontrollen övergår här istället till att kontrollera konstruktionens deformationsförmåga. I detta avsnitt görs detta gentemot uttrycket i Betonghandboken (1990), vilket beskrivs närmare i avsnitt 4.8.2.2.

Tillåten rotationskapacitet bestäms som

$$\theta = A \cdot B \cdot C \cdot 10^{-3} \tag{D.54}$$

där

$$A = 1 + 0{,}6\omega_v + 1{,}7\omega_s' - 1{,}4\frac{\omega_s}{\omega_{bal}} \tag{D.55}$$

faktorn B väljs ur tabell i avsnitt 4.8.2.2 och

$$C = \min\begin{cases} 7 \cdot \dfrac{l_{0,fält}}{d} \\ 45 \end{cases} \tag{D.56}$$

Några byglar är inte inlagda i väggen varför

$$\omega_v = 0 \tag{D.57}$$

medan mekanisk armeringsmängd på dragen sida uppgår till

$$\omega_s = \frac{A_s}{bd}\frac{f_{st}}{f_{cc}} = \frac{393}{1000 \cdot 160} \cdot \frac{500}{22} = 0{,}056 \tag{D.58}$$

På tryckt sida är den mekaniska armeringsmängden samma som på den dragna sidan men eftersom det inte finns några byglar får gynnsam inverkan av dessa inte medräknas varför

$$\omega_s' = 0 \tag{D.59}$$

Balanserad mekanisk armeringsmängd är

$$\omega_{bal} = 0.8\frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + f_{st}/E_s} = 0.8 \cdot \frac{3{,}5}{3{,}5 + 500/200} = 0{,}467 \tag{D.60}$$

vilket slutligen ger att

$$A = 1 + 0{,}0 + 0{,}0 - 1{,}4 \cdot \frac{0{,}056}{0{,}467} = 0{,}833 \tag{D.61}$$

Med utgångspunkt från armering BT500B, klass B, ger avsnitt 4.8.3.1 att

$$B = 0{,}8 \tag{D.62}$$

samt att

$$A \cdot B = 0{,}833 \cdot 0{,}8 = 0{,}666 \leq 1{,}1 \tag{D.63}$$

vilket är uppfyllt. För en fritt upplagd balk gäller att

$$l_{0,fält} = \frac{L}{2} = \frac{2{,}7}{2} = 1{,}35 \text{ m} \tag{D.64}$$

vilket ger att

$$C = \min \begin{cases} 7 \cdot \dfrac{l_{0,fält}}{d} = 7 \cdot \dfrac{1{,}35}{0{,}16} = 59{,}1 \\ 45 \end{cases} \rightarrow C = 45 \tag{D.65}$$

varvid tillåten rotationskapacitet slutligen kan beräknas som

$$\theta = 0{,}666 \cdot 0{,}8 \cdot 45 \cdot 10^{-3} = 30 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \tag{D.66}$$

Tillåten fältdeformation kan ur detta sedan bestämmas som

$$u_{rd} = \frac{\theta \cdot l}{2} = \frac{30 \cdot 10^{-3} \cdot 2{,}7}{2} = 40{,}5 \text{ mm} \tag{D.67}$$

En jämförelse med erforderlig förskjutning i Tabell D.5 ger att $u_{III} = 44$ mm vilket är större än tillåten förskjutning på $u_{rd} = 40{,}5$ mm. Dvs. en balk med en ren plastisk respons har, med rotationskapacitet enligt Betonghandboken, inte tillräcklig deformationsförmåga och klarar således inte heller av att stå emot aktuell impulslast. Skillnaden är dock liten och det är möjligt att göra en något förfinad analys för att trots allt påvisa att deformationsförmågan är tillräcklig.

D.5.2.5 Förfinad kontroll av erforderlig plastisk deformationsförmåga

I föregående avsnitt påvisas att tillgänglig deformationsförmåga är otillräcklig när studerad balk betraktas ha en rent plastisk respons. I verkligheten kommer balken dock inte uppvisa ett rent plastiskt beteende utan något som snarare motsvarar en elastoplastisk respons. Detta innebär att en viss energiupptagning i konstruktionen kommer ske inom den elastiska delen vilket gör att erforderlig plastisk förskjutning minskar något. Här nyttjas en elastisk deformationsförmåga motsvarande styvheten för sprucket tvärsnitt (stadium II).

Av Tabell D.4 framgår att styvheten för sprucket tvärsnitt är $k_{II} = 6{,}2 \cdot 10^6$ N/m samt att mothållande kraft i stadium III är $R = 90$ kN. Den elastiska förskjutning som hinner utvecklas innan den mothållande kraften uppnås uppgår därför till

$$u_{III,el} = \frac{R}{k} = \frac{90 \cdot 10^3}{6{,}2 \cdot 10^6} = 14{,}6 \text{ mm} \tag{D.68}$$

Den energimängd som förbrukas under denna elastiska deformation är för en linjärelastisk respons hälften så stor jämfört med vad som förbrukas vid motsvarande plastiska förskjutning med konstant mothållande kraft R. Således motsvarar detta också en minskning av erforderlig plastisk förskjutning med

$$\Delta u_{III} = \frac{u_{III,el}}{2} = \frac{14{,}6}{2} = 7{,}3 \text{ mm} \tag{D.69}$$

vilket ger en erforderlig plastisk förskjutning

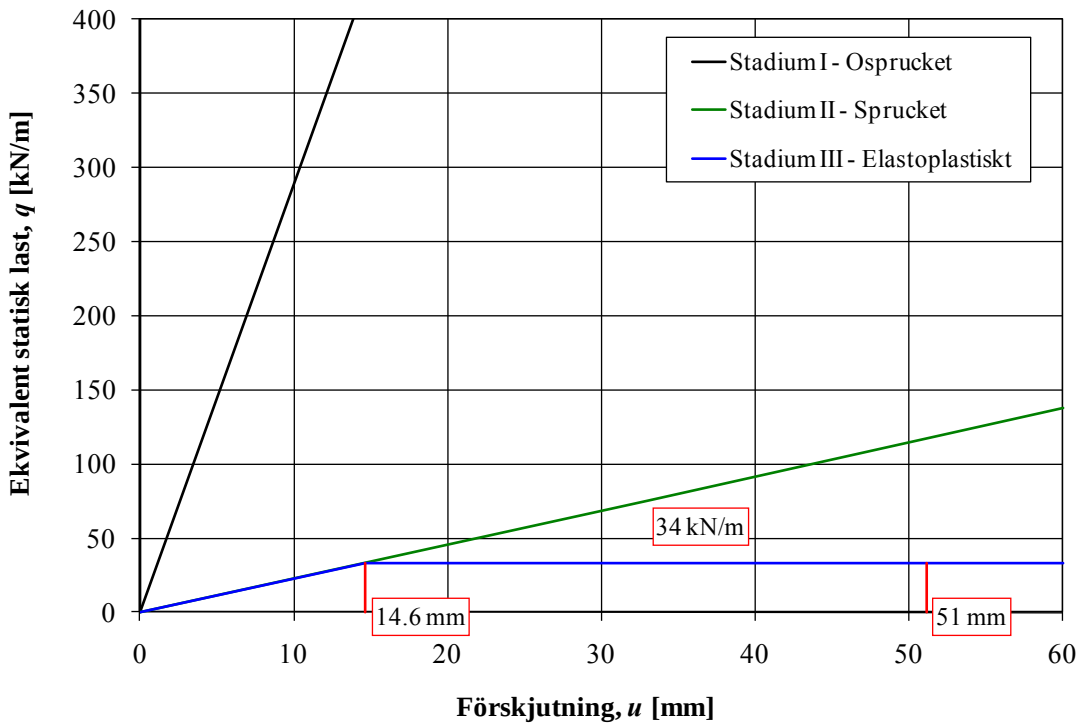
$$u_{III,pl} = u_{III} - \Delta u_{III} = 43{,}8 - 7{,}3 = 36{,}5 \text{ mm} \tag{D.70}$$

och en total förskjutning på

$$u_{III,tot} = u_{III,el} + u_{III,pl} = 14{,}6 + 36{,}5 = 51{,}1 \text{ mm} \approx 51 \text{ mm} \tag{D.71}$$

vilket illustreras i Figur D.8.

Den plastiska förskjutningen $u_{III,pl} = 36{,}7$ mm < 40,5 mm = u_{rd} varför det kan konstateras att genom att nyttja en elastoplastisk respons istället för ett rent plastiskt beteende är det möjligt att påvisa tillräcklig deformationsförmåga, och därmed bärighet, hos utsatt balk.



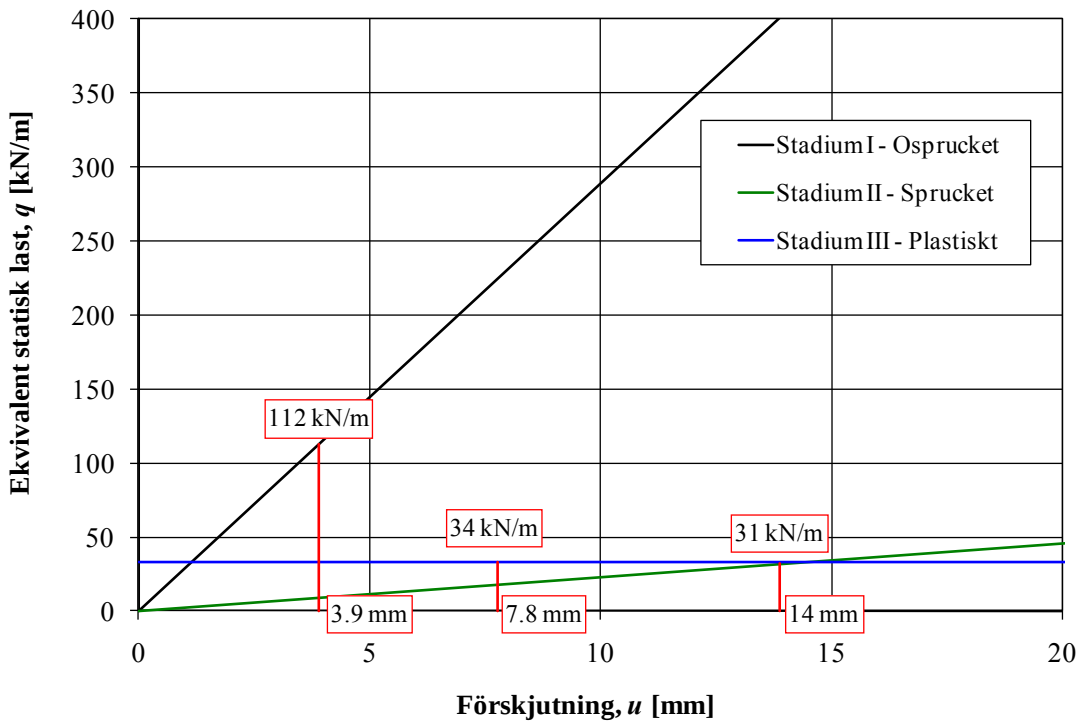
Figur D.8 *Sammanställning av ekvivalent statisk last q och maximal förskjutning u för studerad balk belastad av reflekterad stötvåg när balken antas befinna sig i stadium I, stadium II eller stadium III.*

D.5.3 Byggnad utsatt för oreflekterad stötvåg

Beräkningarna är identiska med de i avsnitt D.5.2 varför enbart en sammanställning av resulterande förskjutning, ekvivalent statisk last samt maximalt fältmoment redovisas för detta belastningsfall, se Tabell D.6 och Figur D.9. Av detta framgår att den ekvivalenta lasten för balk i stadium II är lägre än kapaciteten i stadium III, dvs. någon plasticering av balken kommer inte att inträffa.

Tabell D.6 *Sammanställning av förskjutning, ekvivalent statisk last samt maximalt fältmoment för studerad balk när denna utsätts för en idealiskt impulslast I_s^+ enligt Tabell D.3 och betraktas vara helt osprucken, sprucken eller uppvisa ett rent plastiskt beteende.*

Egenskap	Betäckning	Stadium I (osprucken)	Stadium II (sprucken)	Stadium III (brott)	Enhet
Förskjutning	u	3,9	14	7,8	mm
Ekv. statisk last	q	113	32	34	kN/m
Max. fältmoment	M	103	29	31	kNm



Figur D.9 Sammanställning av ekvivalent statisk last q och maximal förskjutning u för studerad balk belastad av oreflekterad stötvåg när balken antas befinna sig i stadium I, stadium II eller stadium III.

D.6 Kommentar

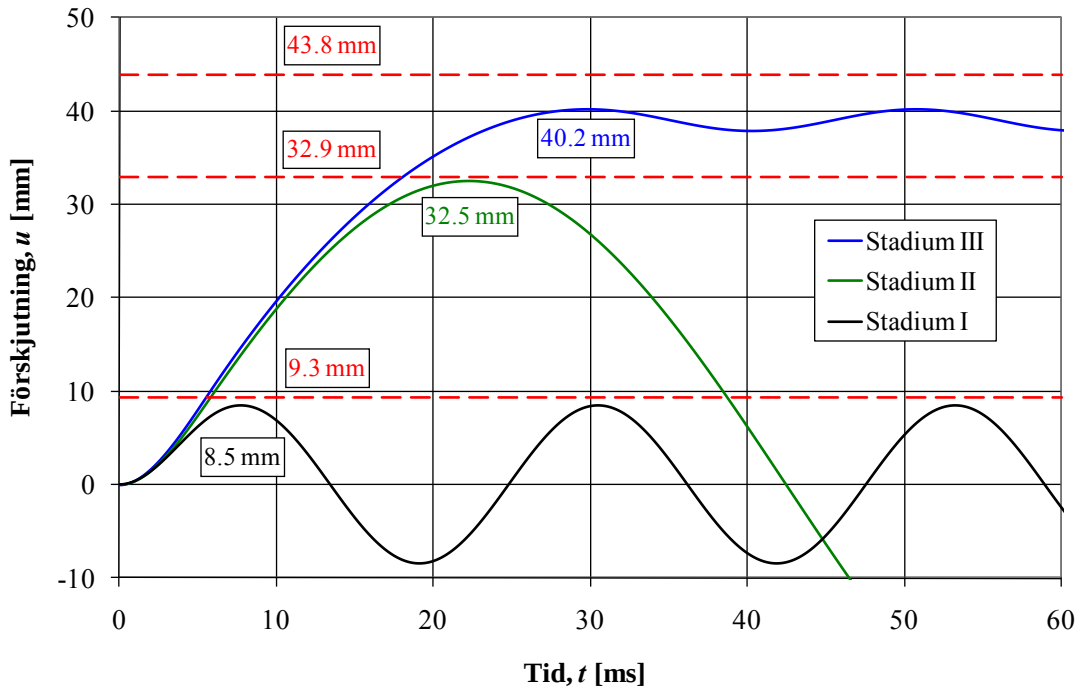
Av Figur D.7 och Figur D.9 kan det noteras att den resulterande förskjutningen och den ekvivalenta lasten varierar betänkligt beroende på vilken typ av respons som balken antas uppvisa. En styv respons, osprucken balk (stadium I), genererar en liten förskjutning men en stor ekvivalent last. På samma sätt medför en vek respons, sprucken balk (stadium II), en större förskjutning men samtidigt en märkbart lägre ekvivalent statisk last. Slutligen genererar i det här fallet en balk med plastisk respons (stadium III) de största förskjutningarna men också den märkbart lägsta ekvivalenta lasten. För studerat exempel konstateras det i avsnitt D.5.2.3 att betongkonstruktionen utsatt för en reflekterad explosionslast både kommer att spricka upp och plasticera. Detta är normalt men inte nödvändigt för en betongkonstruktion utsatt för en sådan last. I avsnitt D.5.3 visas exempelvis att balk utsatt för en oreflekterad explosionslast kommer stanna kvar i stadium II. Det är dock i de flesta fall orealistiskt att anta att en betongkonstruktion ska förbli osprucken när den utsätts för en explosionslast. Det bidrag till balkens energiförbrukning som fås i stadium I är försumbart varför det, som anges i avsnitt 3.3.3.2, är ett rimligt antagande att anta en respons hos en impulsbelastad betongkonstruktion som en kombination av stadium II och stadium III.

För balkarna med elastisk respons är den förbrukade energin, dvs. arean under respektive last-förskjutningskurva, densamma. För balk med plastisk respons är denna area dock något större, omkring 20 %. Denna skillnad beror på att balken med plastisk respons behöver ta upp en större energimängd på grund av en lägre effektiv massa, via faktorn κ_{MF}, som den har jämfört med balk med elastisk respons, dvs.

$$\eta = \frac{\kappa_{MF,I}}{\kappa_{MF,III}} = \frac{0{,}788}{0{,}667} = 1{,}18 \tag{D.72}$$

Sammanfattningsvis kan konstateras att det är gynnsamt att utsatt konstruktion uppvisar en så mjuk respons som möjligt eftersom detta genererar en lägre ekvivalent last. Att få en plastisk respons blir därmed önskvärt att uppnå. Om så är fallet är det dock viktigt att även kontrollera den plastiska deformationsförmågan eftersom det är denna som utgör brottkriteriet för en sådan konstruktion.

I Figur D.10 jämförs förskjutningar beräknade med centrala differensmetoden, se Bilaga B, för en reflekterad stötvågslast med linjärt tryckavtagande enligt Tabell D.2 och Figur D.5. Av detta framgår att erhållna förskjutningar minskar något gentemot de i avsnitt D.5 beräknade värdena. Detta är en effekt av att applicerad last inte helt uppfyller kraven på att fungera som en karakteristisk impulslast, se avsnitt 4.5. Det är värt att notera att skillnaden blir procentuellt sett större för balk i stadium I än för balk i stadium II. Detta beror på att den senare uppvisar en lägre egenfrekvens och därmed också en längre egensvängningsperiod. Därmed blir trycklastens varaktighet, i förhållande till sin egensvängningsperiod, kortare för väggstrimlan i stadium II, vilket resulterar i att den i högre grad kan betraktas som en ideal impulslast.

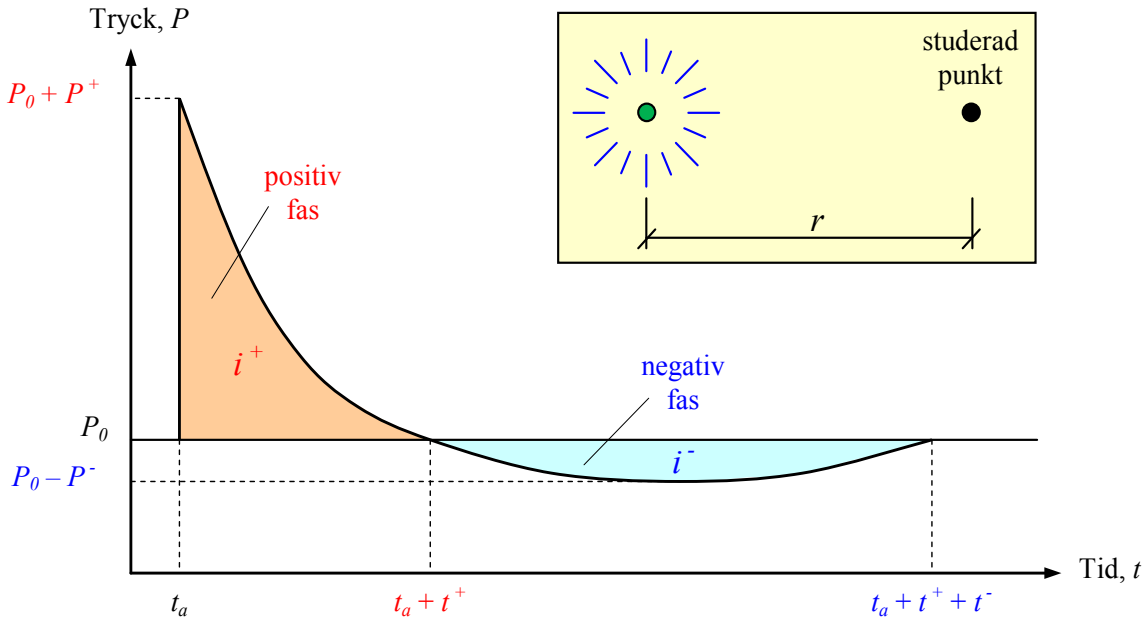


Figur D.10 Förskjutnings-tidssamband för studerad balk när responsen löses via numerisk lösning för en linjärt avtagande lastkurva i enlighet med Tabell D.2 och Figur D.5. Listade värden anger erhållen och i avsnitt D.5.2.1 beräknad förskjutning.

Bilaga E Stötvågsparametrar positiv fas

Samband för stötvågsparametrar i positiv fas baseras på ConWep (1992) och nedan givna samband och beskrivningar är hämtade från Johansson och Laine (2007). I denna bilaga behandlas enbart den positiva fasen. För närmare information om den negativa fasen hänvisas till Johansson och Laine (2007, 2008).

Figur E.1 visar ett typiskt tryck-tidssamband för en ideal stötvåg i en fix punkt på avståndet r från explosionen. Med ideal våg syftas här på en stötvåg som uppkommer vid fri avlastning i luften utan några störande reflexioner. Explosionen detonerar vid tiden $t = 0$ och efter tiden t_a har stötvågen nått fram till den studerade punkten. Trycket vid vågfronten ökar då från det omgivande trycket P_0 (i ostörd luft är $P_0 \approx 101{,}3$ kPa) till $P_0 + P^+$ under mycket kort tid. Trycket avtar därefter till dess att det vid tiden $t_a + t^+$ åter når bakgrundstrycket P_0 och därigenom avslutar tryckvågens positiva fas. En negativ fas med amplitud $P_0 - P^-$ tar därefter vid då flöden av luft strömmar mot explosionens centrum och därigenom skapar ett partiellt vakuum. Så småningom återgår trycket till P_0 vid tiden $t_a + t^+ + t^-$.



Figur E.1 Typiskt tryck-tidssamband för ideal luftstötvåg vid fri sfärisk utbredning.

Den impulstäthet i^+ som överförs i den positiva fasen definieras som

$$i^+ = \int_{t_a}^{t_a+t^+} \left(P(t) - P_0\right) dt \tag{E.1}$$

där $P(t)$ beskriver tryckets variation med tiden t. Tillsammans med övertycket P^+ samt varaktigheten t^+ är den positiva impulstätheten i^+ viktiga parametrar vid beskrivandet av en stötvågs styrka och utseende. Ett vanligt använt uttryck för tryck-tidssambandet är

$$P(t) = P_0 + P^+\left(1 - \frac{t}{t^+}\right)e^{-\alpha t/t^+} \tag{E.2}$$

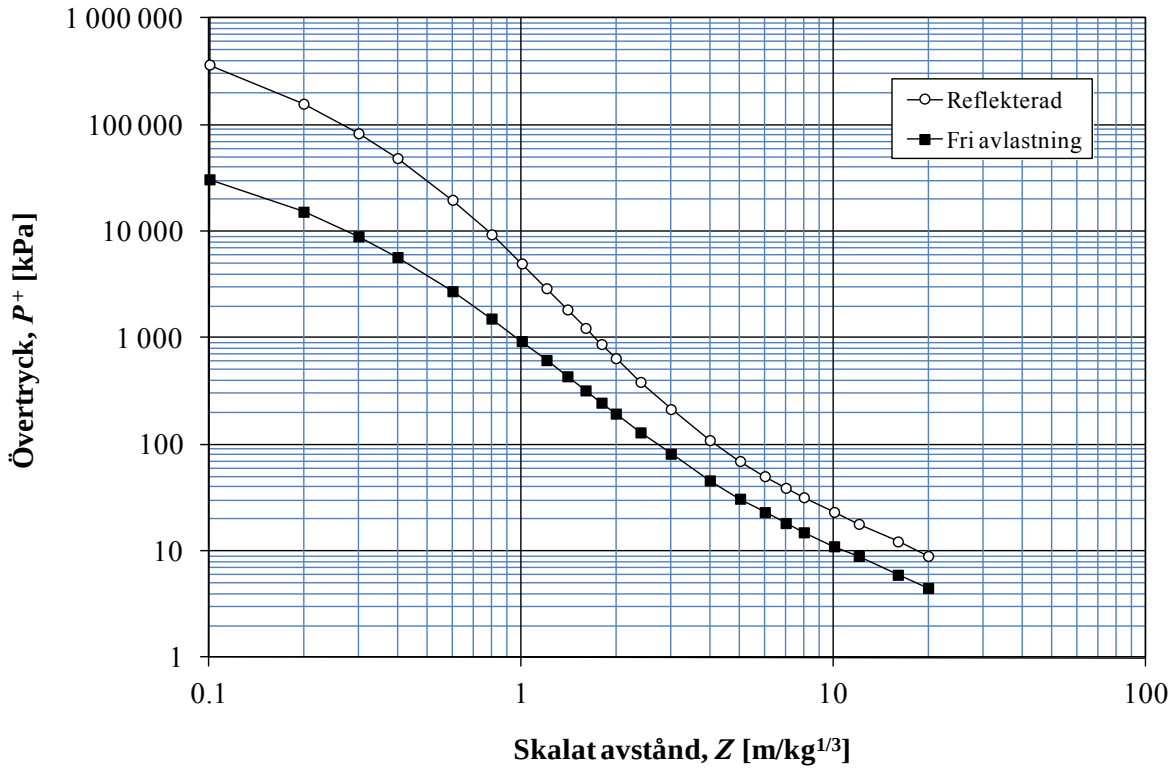
där t markerar tiden efter stötvågens ankomst (dvs. mätt utgående från ankomsttiden t_a) och α en faktor med vilken övertryckets avklingning beskrivs. Kombinering av ekvation (E.1) och (E.2) ger

$$i^+ = P^+ t^+ \left[\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \left(1 - e^{-\alpha} \right) \right] \tag{E.3}$$

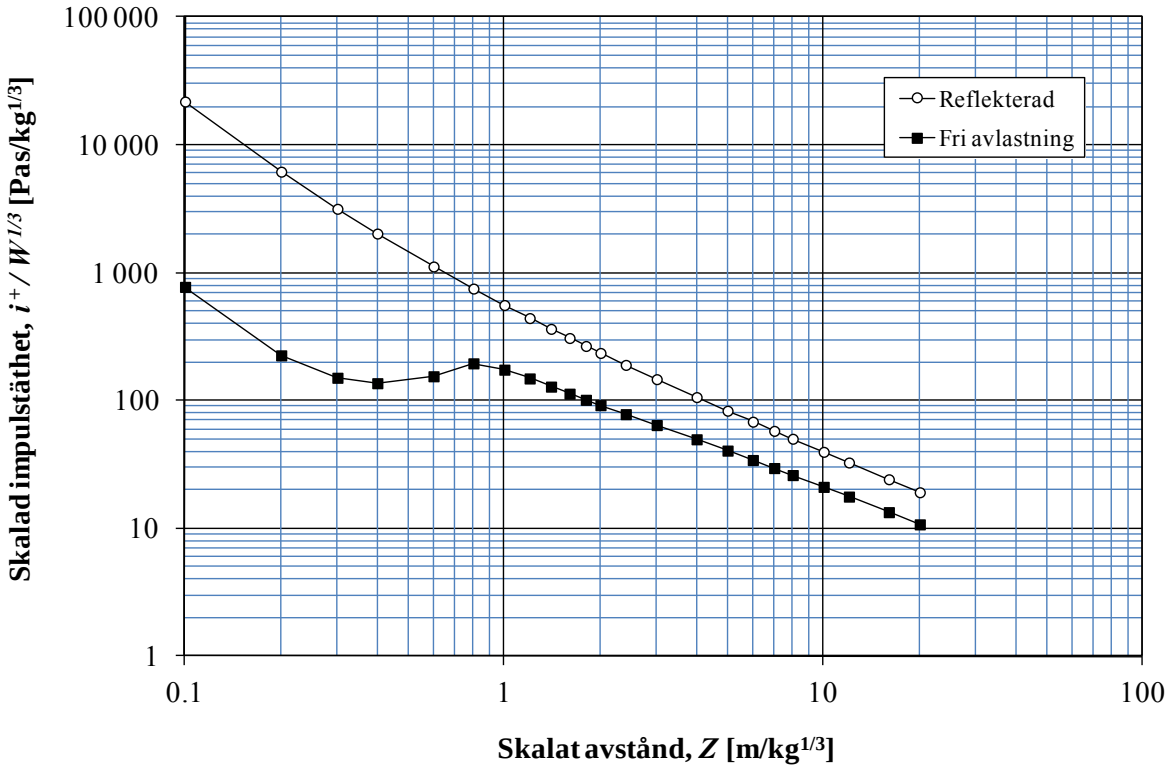
från vilken faktorn α kan lösas ut när P^+, i^+ samt t^+ är kända. En alternativ lastbeskrivning som är en vanligt förekommande förenkling är att beskriva lasten med en triangulär lasthistoria, dvs. linjärt avtagande tryck, utgående från aktuellt övertryck och impulstäthet. Dvs. en fiktiv varaktighet t_Δ^+ beräknas som

$$t_\Delta^+ = \frac{2i^+}{P^+} \tag{E.4}$$

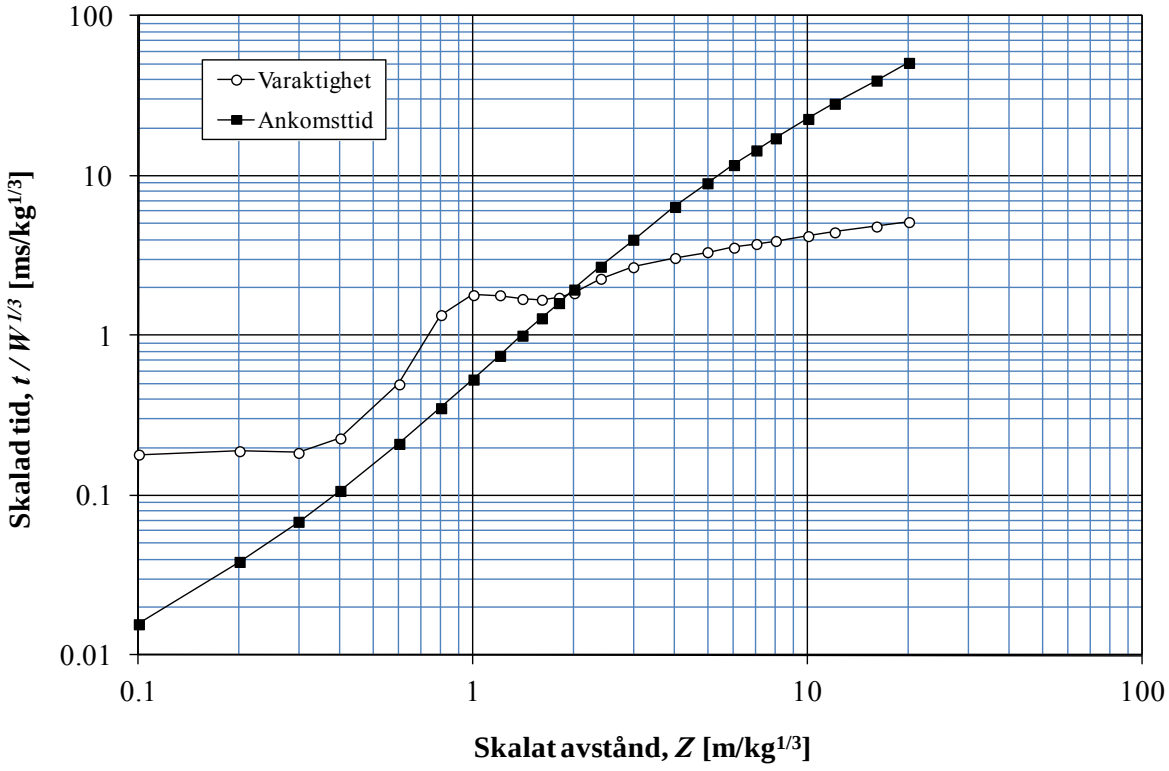
I Figur E.2 till Figur E.4 redovisas tryck, impulstäthet, ankomsttid och varaktighet för en explosion med möjlighet till fri, sfärisk avlastning. För tryck och impulstäthet ges samband för både oreflekterad och reflekterad (normalreflexion) stötvåg – för ankomsttid och varaktighet är dessa dock desamma för båda fallen. Det ska även noteras att impulstätheten, ankomsttid samt varaktighet har skalats med hänsyn till laddningens storlek $W^{1/3}$ i enlighet med Hopkinsons skallag, se Johansson och Laine (2007). Tabellerade värden presenteras i Tabell E.1.



Figur E.2 Reflekterat och oreflekterat övertryck som funktion av det skalade avståndet Z. Från ConWep (1992).



Figur E.3 Reflekterad och oreflekterad impulstäthet som funktion av det skalade avståndet Z. Från ConWep (1992).



Figur E.4 Ankomsttid och varaktighet som funktion av det skalade avståndet Z. Från ConWep (1992).

Tabell E.1 Stötvågsparametrar från ConWep som i Figur E.2 till Figur E.4 redovisas grafiskt.

Z [m/kg$^{1/3}$]	P_s^+ [kPa]	P_r^+ [kPa]	$i_s^+ / W^{1/3}$ [Pas/kg$^{1/3}$]	$i_r^+ / W^{1/3}$ [Pas/kg$^{1/3}$]	$t_a / W^{1/3}$ [ms/kg$^{1/3}$]	$t^+ / W^{1/3}$ [ms/kg$^{1/3}$]
0,1	30 830	368 300	775	21 840	0,016	0,180
0,2	15 300	158 000	226	6 176	0,038	0,190
0,3	8 996	83 360	151	3 164	0,069	0,185
0,4	5 745	48 800	137	2 026	0,107	0,228
0,6	2 747	19 800	155	1 119	0,211	0,496
0,8	1 521	9 384	196	752	0,352	1,346
1	935	5 006	175	559	0,532	1,795
1,2	620	2 931	149	442	0,749	1,792
1,4	437	1 851	129	364	1,001	1,697
1,6	322	1 242	113	309	1,286	1,679
1,8	247	877	101	267	1,601	1,729
2	195	646	92	236	1,944	1,846
2,4	130	387	78	190	2,702	2,272
3	82	215	64	147	3,988	2,684
4	46	110	50	106	6,396	3,064
5	31	70	41	83	8,996	3,334
6	23	50	34	68	11,692	3,556
7	18	39	30	58	14,432	3,748
8	15	32	26	50	17,190	3,916
10	11	23	21	40	22,720	4,200
12	9	18	18	33	28,280	4,434
16	6	12	13	24	39,480	4,822
20	5	9	11	19	50,960	5,142

MSB Myndigheten för samhällsskydd och beredskap
651 81 Karlstad www.msb.se